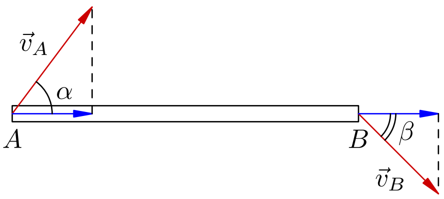
Закон палочки

Пусть палочка AB движется произвольным образом (см. рисунок). Мы считаем палочку абсолютно твёрдой (то есть длина палочки неизменна).



Закон палочки. Составляющие скоростей концов $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ в направлении вдоль палочки в любой момент времени совпадают:

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta.$$

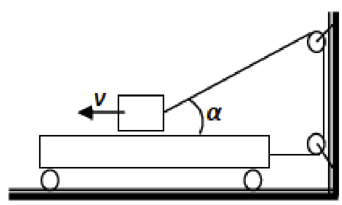
Это утверждение легко доказывается от противного. В самом деле, предположим, что указанные составляющие скоростей различны. Тогда палочка начнёт деформироваться — растягиваться или сжиматься — вопреки её абсолютной твёрдости. Противоречие.

Закон палочки можно применять к движению произвольного твёрдого тела; «палочкой» тогда будет служить любой отрезок, соединяющий пару точек этого тела. Удачный выбор двух-трёх таких отрезков обычно приводит к решению задачи.

Задача 1. (*МОШ, 2007, 10*) По гладкому горизонтальному столу скользит однородная линейка длиной $L = 25$ см. В некоторый начальный момент времени скорости концов линейки направлены перпендикулярно к ней в разные стороны и равны $v_1 = 10$ см/с и $v_2 = 30$ см/с. Какая скорость v будет у центральной точки линейки через время $t = 5$ с после начального момента? За какое время τ от начального момента линейка повернётся на угол $90°$ от исходного положения?

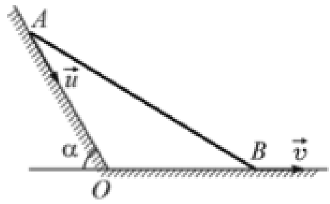
$v = \frac{v_2 - v_1}{2} = 10$ см/с; $\tau = \frac{\pi L}{v_1 + v_2} \approx 1$ с

Задача 2. (*Всеросс., 2017, МЭ, 10*) Небольшой брусок через систему блоков связан нерастяжимой нитью с длинной тележкой, которая может катиться по горизонтальной поверхности. Брусок кладут на тележку и приводят в движение с постоянной скоростью $v = 2$ м/с, направленной горизонтально вдоль тележки (см. рис.). Какую скорость относительно бруска будет иметь тележка в тот момент, когда угол между наклонной нитью и горизонтом составит $\alpha = 60°$? Считайте, что в указанный момент тележка не доехала до стены, к которой прикреплены блоки.



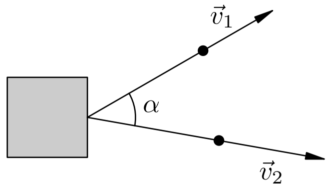
$v_{\text{отн}} = v(1 + \cos\alpha) = 3$ м/с

Задача 3. (*«Курчатов», 2015, 10*) На двугранном угле находится тонкий стержень, нижний конец которого перемещают со скоростью v вдоль горизонтали (см. рисунок). Найдите скорость u верхнего конца стержня в момент, когда $OA : OB = 2 : 1$. Угол $\alpha = 60°$. Концы стержня не отрываются от поверхностей двугранного угла.



$u = \frac{1+2\cos\alpha}{2+\cos\alpha} v = \frac{4}{5} v$

Задача 4. Двое рабочих передвигают тяжёлый ящик с помощью канатов (см. рисунок). Найти скорость ящика в момент, когда канаты образуют угол α, а скорости рабочих $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ направлены вдоль канатов.



$v = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}$

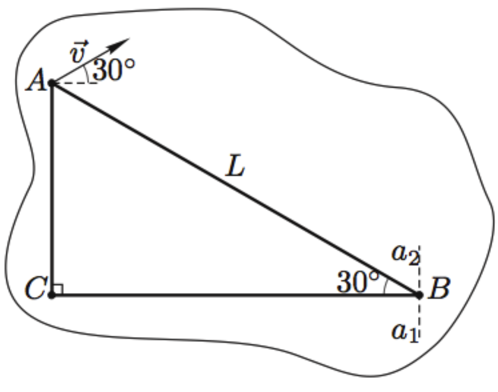
Задача 5. (*МГУ, физический ф-т, 1999*) Вырезанный из однородного листа металла равносторонний треугольник положили на гладкую горизонтальную плоскость и толкнули его. В некоторый момент скорость v_A вершины A этого треугольника оказалась перпендикулярной биссектрисе угла A, а скорость вершины C — направленной вдоль стороны AC. Найти перемещение центра треугольника за время τ после указанного момента.

$s = \frac{1}{2} v_A \tau$

Задача 6. (*МОШ, 2014, 10*) По горизонтальной плоскости скользит квадратная пластинка $ABCD$. В некоторый момент времени вершина A пластинки движется со скоростью $\vec{v}_A$, равной по модулю 5 м/с, а соседняя вершина B — со скоростью $\vec{v}_B$, равной по модулю 1 м/с. При этом скорость $\vec{v}_O$ точки O — центра пластинки — направлена перпендикулярно прямой BD, являющейся диагональю квадрата. Найдите проекцию скорости $\vec{v}_O$ на направление AC в данный момент времени.

± 3 м/с или ± 4 м/с

Задача 7. (*Всеросс., 2007, финал, 9*) По гладкой горизонтальной поверхности скользит пластинка, на которой отмечены три точки A, B и C, лежащие в вершинах прямоугольного треугольника с углом 30° при вершине B (см. рисунок). Гипотенуза треугольника равна L. В некоторый момент времени скорость точки A равна по модулю v_0 и направлена под углом 30° к катету BC. Известно также, что скорость точки B в этот момент времени направлена вдоль линии a_1a_2, параллельной катету AC.



Определите:

1) модуль и направление скорости точки B;

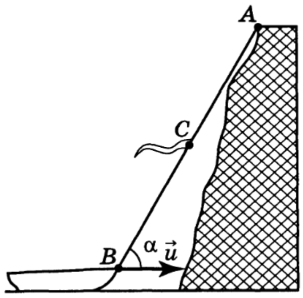
2) модуль и направление скорости точки C;

3) положение точки O, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Изобразите на чертеже векторы скоростей точек B и C, а также положение точки O.

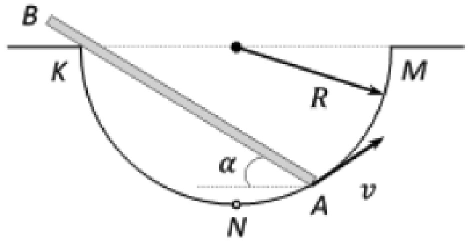
1) $v_B = v_0$, вниз; 2) $v_C = v_0/2$, вверх; 3) $O \in BC$, при этом AO — биссектриса угла A

Задача 8. (*Всеросс., 2001, финал, 9*) С высокого берега озера за верёвку подтягивают лодку. К верёвке привязан флажок (см. рисунок). В момент, когда флажок оказался в точке C посередине между A и B, верёвка была направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Найдите скорость флажка в этот момент, если известно, что скорость лодки $u = 1$ м/с.



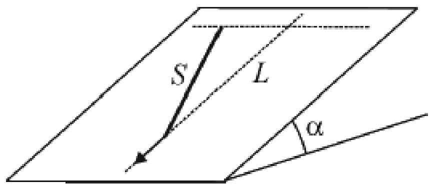
$v = u\sqrt{\cos^2\alpha + \frac{1}{4}\sin^2\alpha} \approx 0{,}66$ м/с

Задача 9. (*Всеросс., 2016, РЭ, 10*) Стержень AB касается уступа K полусферической лунки радиуса R. Точка A движется равномерно со скоростью v по поверхности лунки, начиная из нижней точки N, к точке M. Найти зависимость модуля скорости u конца стержня B от угла α, который стержень составляет с горизонтом. Длина стержня AB равна $2R$.



$u = 2v\sin\frac{\alpha}{2}$

Задача 10. (*МОШ, 2016, 11*) Тонкий однородный жёсткий стержень S скользит по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В начальный момент времени нижний конец стержня движется вниз вдоль наклонной плоскости (по линии L «падения воды», как указано стрелкой — см. рисунок), а верхний конец стержня движется горизонтально, причем модуль скорости верхнего конца в два раза больше, чем нижнего. По прошествии некоторого промежутка времени оказалось, что середина стержня сместилась на одинаковые расстояния по горизонтали и вдоль линии «падения воды». Во сколько раз изменился модуль скорости середины стержня за этот промежуток времени?



$\sqrt{\frac{13}{5}} \approx 1{,}61$