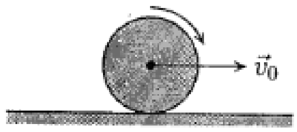
Вращение твёрдого тела



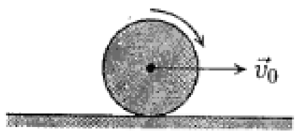
Задача 1. (*МФТИ, 2003*) В результате удара шар получил скорость v_0 вдоль горизонтальной поверхности стола и вращение вокруг своего горизонтального диаметра, перпендикулярного скорости (см. рисунок). После удара скорость шара уменьшалась в течение времени τ, а затем стала постоянной.

1) Найдите эту постоянную скорость.

2) На каком расстоянии от места удара окажется шар через время 4τ после удара?

Коэффициент трения скольжения между поверхностями шара и стола равен μ.

1) $v = v_0 - \mu g\tau$; 2) $s = 4v_0\tau - \frac{7}{2}\mu g\tau^2$



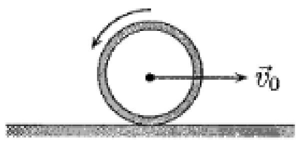
Задача 2. (*МФТИ, 2003*) Шару сообщили ударом скорость v_0 вдоль горизонтальной поверхности стола и вращение вокруг его горизонтального диаметра, перпендикулярного скорости (см. рисунок). В результате скорость шара в течение времени t_0 увеличивалась, а затем шар стал двигаться с постоянной скоростью.

1) Найдите эту постоянную скорость.

2) На какое расстояние от места удара удалится шар за время $3t_0$ после удара?

Коэффициент трения скольжения между поверхностями шара и стола равен μ.

1) $v = v_0 + \mu g t_0$; 2) $s = 3v_0t_0 + \frac{5}{2}\mu g t_0^2$

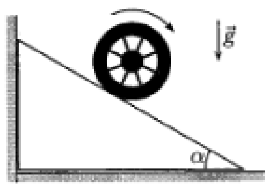


Задача 3. (*МФТИ, 2003*) Обручу, закрученному вокруг горизонтальной оси, проходящей перпендикулярно плоскости обруча через его центр, сообщают вдоль горизонтальной поверхности стола скорость v_0, направленную перпендикулярно оси вращения (см. рисунок). Обруч сначала удаляется, а затем из-за трения о стол возвращается к месту начала движения со скоростью $v = v_0/4$, катясь без проскальзывания. Коэффициент трения скольжения между обручем и столом равен μ.

1) Найдите время движения до места максимального удаления.

2) Через какое время, считая от начала движения, обруч возвратится назад?

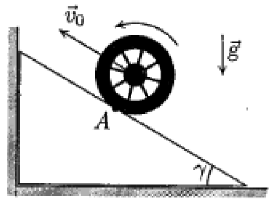
1) $t_1 = \frac{v_0}{\mu g}$; 2) $t_2 = \frac{25}{8}\frac{v_0}{\mu g}$



Задача 4. (*МФТИ, 2005*) На гладкой горизонтальной поверхности стола находится клин, прислонённый к гладкой вертикальной стене. Поверхность клина наклонена к горизонту под углом α (см. рисунок). Автомобильное колесо массой M скатывается без проскальзывания с клина. В процессе движения колеса по клину клин действует на стену с постоянной силой F. Какой скорости достигнет колесо, пройдя из состояния покоя путь s по клину?

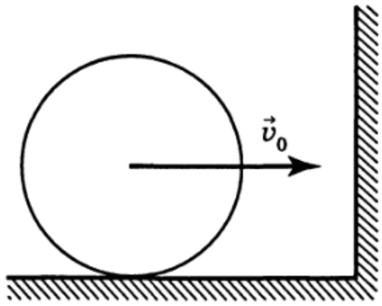
$v = \sqrt{\frac{2Fs}{M\cos\alpha}}$

Задача 5. (*МФТИ, 2005*) На гладкой горизонтальной поверхности стола находится призма, упирающаяся в гладкую вертикальную стенку. Поверхность призмы наклонена под углом γ к горизонту. Велосипедное колесо массой m движется вверх по призме, катясь без проскальзывания и имея при прохождении точки A скорость v_0. При движении колеса вверх призма давит на стенку с постоянной силой F. На какое максимальное расстояние удалится колесо от точки A при движении вверх?



$s = \frac{mv_0^2 \cos\gamma}{2F}$

Задача 6. (*Всеросс., 1998, финал, 9*) Тонкостенный цилиндр катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью $v_0 = 6$ м/с. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью равен $\mu = 0{,}2$. Цилиндр сталкивается с вертикальной гладкой стенкой и упруго отражается от неё (рис.).



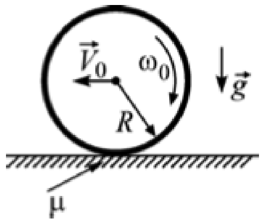
1) Найдите скорости верхней и нижней точек цилиндра непосредственно после отражения.

2) Определите скорость центра цилиндра через $t_1 = 2$ с после столкновения со стенкой и путь, пройденный им за это время.

3) Определите, какой путь пройдет центр цилиндра к моменту времени $t_2 = 4$ с.

1) $v_в = 0$, $v_н = 2v_0$; 2) 2 м/с и 8 м; 3) 9 м

Задача 7. (*МОШ, 2013, 11*) «Хула-хуп» — это обруч, который девушки крутят на талии, а спортсменки проделывают с ним и другие «фокусы». Например, закручивают его в вертикальной плоскости и толкают от себя по горизонтали, после чего вращающийся обруч, проскальзывая по полу, отъезжает от них на некоторое расстояние и возвращается обратно.



Сформулируем задачу так: обруч радиусом R в момент толчка (см. рисунок) закручен вокруг горизонтальной оси до угловой скорости ω_0, и ему придали скорость $\vec{v}_0$, направленную вдоль пола перпендикулярно оси вращения. Коэффициент трения обруча об пол равен μ.

1) На какое максимальное расстояние в направлении скорости $\vec{v}_0$ обруч удалится от начальной точки?

2) Какова будет его угловая скорость в момент остановки?

3) С какой скоростью он будет катиться после окончания проскальзывания по полу?

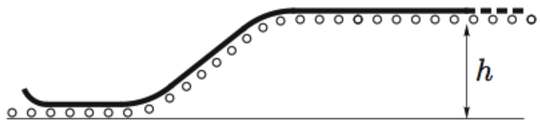
4) Как связаны v_0 и ω_0, если проскальзывание прекращается в момент возврата в исходную точку?

1) $s_{\max} = \frac{v_0^2}{2\mu g}$; 2) $\omega_1 = \omega_0 - \frac{v_0}{R}$ при условии $v_0 < \omega_0 R$; 3) $v = \frac{\omega_0 R - v_0}{2}$; 4) $v_0 = \frac{1}{3}\omega_0 R$

Задача 8. (*МОШ, 2007, 11*) Велосипедное колесо, вся масса которого сосредоточена в его ободе, раскрутили вокруг оси, удерживая её неподвижной в горизонтальном положении. При этом пришлось совершить работу A, и вся эта работа пошла на увеличение механической энергии колеса. Затем колесо осторожно поставили на горизонтальную поверхность доски такой же массы, которая может без трения двигаться по столу. Какое максимальное количество теплоты может выделиться в системе, пока колесо не покинет доску? Колесо при движении все время остаётся в вертикальной плоскости.

$\boxed{Q_{\max} = \frac{1}{3}A}$

Задача 9. (*Всеросс., 2003, финал, 10*) Горка представляет собой плавный переход между двумя плоскими поверхностями, отстоящими друг от друга по высоте на h (рис.). На горке и плоских поверхностях достаточно часто расположены небольшие шероховатые массивные валики (расстояние между осями соседних валиков равно l), по которым катится длинный тяжёлый ковер. Определите установившуюся скорость v ковра.



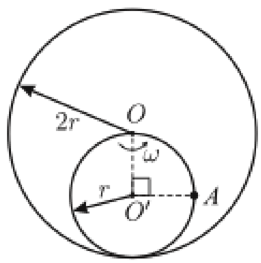
Масса m валика сосредоточена на его ободе. Трением в осях валиков можно пренебречь. Первоначально валики были неподвижны. Погонная плотность ковра равна ρ. Гибкость ковра позволяет ему повторить профиль горки, но, вместе с тем, не даёт переднему краю провалиться между валиками.

$\boxed{v = \sqrt{\frac{\rho g h l}{m}}}$

Задача 10. (*МОШ, 2017, 11*) Вертикальный стержень длиной l стоит на гладкой горизонтальной поверхности. В какой-то момент он теряет устойчивость и падает. По какой траектории движется мгновенный центр вращения стержня во время его падения? Какое расстояние пройдёт нижняя точка стержня к моменту его падения?

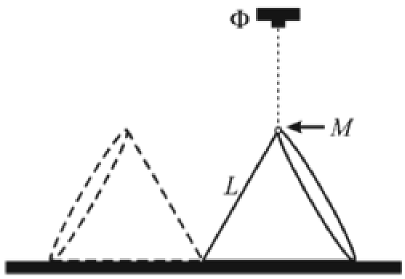
$\boxed{\text{По дуге окружности; } x = l/2}$

Задача 11. (*МОШ, 2006, 11*) По внутренней поверхности большого неподвижного обруча радиусом $2r$ без проскальзывания катится малый обруч радиусом r. Отрезок OO', соединяющий центры обручей, движется с угловой скоростью ω. К малому обручу в точке A прикреплён грузик. В некоторый момент времени обручи и грузик расположены так, как показано на рисунке. Чему равно в этот момент ускорение грузика?



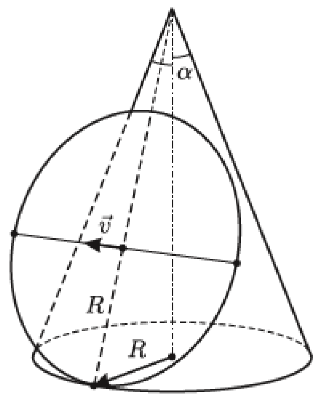
$\boxed{a = \omega^2 r\sqrt{2} \text{ (к точке } O)}$

Задача 12. (*МОШ, 2017, 11*) Прямой круговой конус с образующей длиной $L = 13$ см и диаметром основания $D = 10$ см катится по горизонтальной поверхности, не проскальзывая (см. рис.). Центр основания конуса движется с постоянной по модулю скоростью, а максимально возможная скорость точки, лежащей на поверхности этого конуса, может быть равна $V = 1$ м/с. На одну из точек, расположенных на границе основания и боковой поверхности конуса, нанесена очень маленькая метка M. Над конусом неподвижно закреплён фотоаппарат Ф, объектив которого расположен горизонтально. В момент, когда метка находилась в своём наивысшем положении и строго под объективом фотоаппарата, был сделан фотоснимок. Через какое минимальное время после этого можно при помощи того же неподвижного фотоаппарата сделать точно такую же фотографию?



$T = 5\pi\frac{4L^2-D^2}{VL} \approx 7$ с

Задача 13. (*МОШ, 2009, 11*) Тонкий диск катится по горизонтальной плоскости без скольжения, опираясь в каждый момент времени по диаметру своего основания на гладкую боковую поверхность прямого кругового конуса, стоящего на этой плоскости. Угол при вершине конуса равен 2α, радиус основания конуса равен радиусу диска (см. рисунок). Определить скорости крайних точек горизонтального диаметра диска, если его центр движется со скоростью v. Есть ли на диске точки, движущиеся с большей скоростью, чем крайние точки горизонтального диаметра?

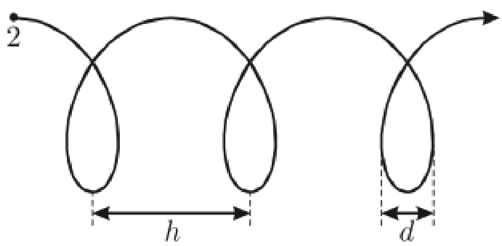


См. конец листка

Задача 14. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Две небольшие шайбы с массами m и $2m$, связанные лёгкой нерастяжимой нитью длины L, скользят по гладкой горизонтальной поверхности. Нить натянута. Найдите силу натяжения нити, если известно, что в некоторый момент времени, когда более лёгкая шайба двигалась вдоль нити со скоростью v, величина скорости более тяжёлой шайбы была в два раза больше.

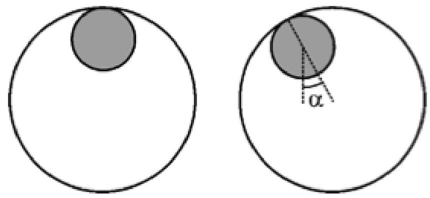
$T = \frac{2mv^2}{L}$

Задача 15. (*МОШ, 2008, 11*) Две материальные точки 1 и 2 массами m_1 и m_2 находятся на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости и связаны невесомой нерастяжимой нитью длиной L. Вначале точка 1 закреплена, а точка 2 движется вокруг неё по окружности. Затем точку 1 освобождают, и точка 2 начинает двигаться по траектории, изображённой на рисунке. Найдите шаг траектории h и ширину петли d.



$h = 2\pi L\frac{m_2}{m_1+m_2}$; $d = 2L\frac{\sqrt{m_1^2-m_2^2}-m_2\arccos\frac{m_2}{m_1}}{m_1+m_2}$ (при $m_1 > m_2$)

Задача 16. (*МОШ, 2015, 11*) Цилиндрическое бревно радиусом r, ось которого горизонтальна, неподвижно закреплено. На бревно надет тонкий однородный обруч массой m и радиусом R так, как показано на рисунке слева. Обруч вывели из положения равновесия, отклонив его в плоскости рисунка так, что прямая, соединяющая центр обруча и точку касания обруча с бревном, образовала угол α с вертикалью (см. рисунок справа), и отпустили. В процессе возникших после этого колебаний обруч движется по бревну без проскальзывания.



1) Найдите скорость нижней точки обруча при прохождении им положения равновесия.

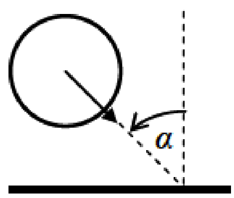
2) Найдите модуль силы, с которой обруч давит на бревно при прохождении положения равновесия.

$v = 2\sqrt{g(R-r)(1-\cos\alpha)}$; $N = mg(2-\cos\alpha)$

Задача 17. (*МОШ, 2015, 11*) С наклонной плоскости без проскальзывания скатывается тонкостенная труба, наматывая на себя сверху лёгкую и тонкую верёвку, которую можно считать нерастяжимой. Свободный конец верёвки прикреплён к бруску, лежащему на плоскости выше трубы. Масса трубы M, масса бруска $M/2$. Ось трубы горизонтальна, свободный участок верёвки параллелен наклонной плоскости и перпендикулярен оси трубы. Плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Ускорение, с которым поступательно движется брусок вслед за трубой, равно $0{,}3g$. Чему равен коэффициент трения μ между бруском и плоскостью?

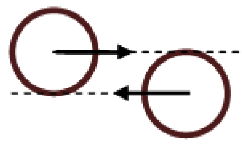
$\mu = \frac{4\sqrt{3}}{15}$

Задача 18. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Кольцо радиуса $a = 4$ см скользит, не вращаясь, по гладкому горизонтальному льду со скоростью $v_0 = 1$ м/с и ударяется о вертикальный борт. Если скорость кольца направлена перпендикулярно борту, то удар будет упругим и кольцо после удара будет двигаться поступательно. Найти угловую скорость вращения кольца после удара, если угол падения кольца $\alpha = 45°$. Коэффициент трения между кольцом и бортом равен $\mu = 0{,}25$.



$\omega = \frac{2\mu v_0 \cos\alpha}{a} \approx 8{,}84$ рад/с

Задача 19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Два одинаковых упругих колечка радиуса R с шероховатой боковой поверхностью скользят навстречу друг другу по гладкой горизонтальной поверхности с одинаковыми по величине скоростями v_0. Линии движения центров колечек проходят по касательной к ним (см. рисунок). После удара они начали вращаться с угловыми скоростями $\omega = \frac{v_0}{4R}$. Найти величину скоростей движения центров масс колечек после удара.

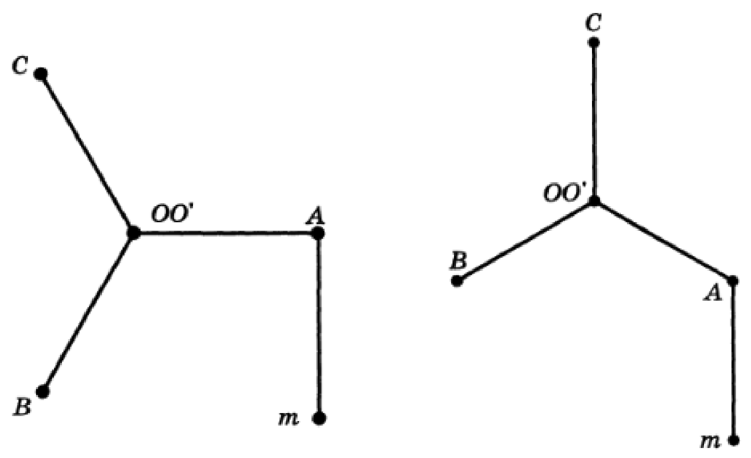


$v_1 = v_2 = \frac{v_0\sqrt{13}}{4}$

Задача 20. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Равносторонний треугольник ABC, вырезанный из плоского однородного листа жести, скользит по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени величины скоростей двух его вершин (A и B) оказались равны друг другу, а величина скорости третьей вершины (C) — в два раза меньше их скоростей. Найти расстояние, на которое сместится центр треугольника за время одного полного оборота треугольника вокруг вертикальной оси. Длина стороны треугольника равна a.

$\boxed{s = \frac{\pi a}{\sqrt{3}}}$

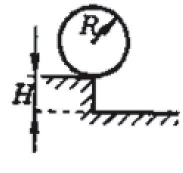
Задача 21. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 10*) Горизонтальная ось OO' может свободно вращаться в подшипниках. Перпендикулярно к ней симметрично прикреплены три одинаковые лёгкие спицы, составляющие друг с другом угол 120°. На концы спиц насажены одинаковые маленькие шарики A, B и C. К шарику A на длинной нерастяжимой лёгкой нити подвешен груз массы m. В первом эксперименте ось OO' повернули так, что спица с шариком A оказалась горизонтальной (рис. слева).



После того как систему отпустили без начальной скорости, груз m начал опускаться с ускорением a_1. Во втором эксперименте ось OO' повернули так, что шарики A и B оказались на одной высоте (рис. справа). Каким будет ускорение a_2 груза m сразу после того, как систему вновь отпустят без начальной скорости?

$\boxed{a_2 = \frac{3a_1 g}{4g - a_1}}$

Задача 22. (*Всеросс., 2005, ОЭ, 10*) На край ступеньки высотой H положили тонкостенную трубу радиусом R и массой m (рис.). Труба начала скатываться со ступеньки. Определите вертикальную составляющую v_y скорости центра масс трубы непосредственно перед ударом о горизонтальную плоскость. Считайте, что труба не проскальзывает.



$$\boxed{v_y = \begin{cases} \sqrt{g\left(2H - \frac{5}{8}R\right)}, & \text{если } H > \frac{R}{2}; \\ \sqrt{\frac{H}{R}}\sqrt{g(2R - H)}, & \text{если } H \leqslant \frac{R}{2} \end{cases}}$$

Задача 23. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 10*) На горизонтальной поверхности находится клин массой m с углом $\alpha = 45°$ при основании. На клин ставят обруч той же массы радиусом R. Систему отпускают без начальной скорости.

1) Найдите ускорение a_1 центра обруча при достаточно большом коэффициенте трения μ между клином и горизонтальной поверхностью (клин неподвижен).

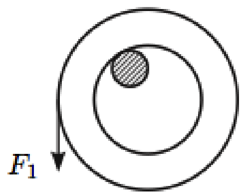
2) При каком минимальном значении μ клин останется неподвижным?

3) С каким ускорением a_2 будет двигаться клин в случае гладкой горизонтальной поверхности?

Обруч катится по клину без проскальзывания.

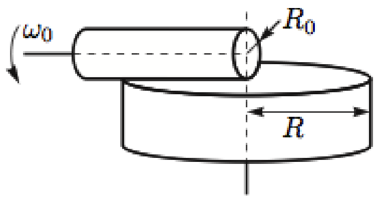
1) $a_1 = \frac{1}{2} g \sin\alpha = \frac{g}{2\sqrt{2}}$; 2) $\mu_{\min} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{3+\cos^2\alpha} = \frac{1}{7}$; 3) $a_2 = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{3+\cos^2\alpha} = \frac{g}{7}$

Задача 24. (*Всеросс., 2014, финал, 10*) Лёгкий провод намотан на цилиндрическую катушку, которая надета на горизонтальный стержень (см. рисунок). Для того чтобы катушка равномерно вращалась на стержне, необходимо тянуть за конец провода вертикально вниз с силой F_1 или горизонтально, вдоль касательной к нижнему краю катушки, с силой F_2. Какова масса m катушки?



$m = \frac{2F_1F_2^2}{g(F_1^2-F_2^2)}$

Задача 25. (*Всеросс., 2016, финал, 11*) Длинный цилиндрический валик радиуса R_0, вращающийся вокруг своей оси с угловой скоростью ω_0, прижимают к свободно (без трения в оси) вращающемуся на оси диску радиуса R. Линия касания диска и валика совпадает с радиусом диска (см. рисунок).



1) Найдите установившуюся угловую скорость ω_μ вращения диска, если трение между валиком и диском сухое.

2) Найдите установившуюся угловую скорость ω_η вращения диска, если трение вязкое. Считайте, что величина силы вязкого трения, приходящаяся на единицу длины соприкосновения, пропорциональна относительной скорости движения соприкасающихся поверхностей валика и диска.

3) Определите отношение $k = \omega_\eta/\omega_\mu$.

1) $\omega_\mu = \omega_0 \frac{R_0}{R}\sqrt{2}$; 2) $\omega_\eta = \frac{3}{2}\omega_0 \frac{R_0}{R}$; 3) $k = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

Ответ к задаче 13

Мгновенная ось ℓ вращения диска проходит через точку касания диска с горизонтальной плоскостью и точку пересечения вертикальной оси конуса с главной осью симметрии диска.

Скорости крайних точек горизонтального диаметра диска:

$$u = v\sqrt{\frac{3-\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\,;$$

вектор $\vec{u}$ составляет с диаметром диска угол

$$\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{1-\sin\alpha}}$$

в плоскости, проходящей через данный диаметр перпендикулярно оси ℓ.

На краю диска есть точки, движущиеся с большей скоростью; они расположены на концах горизонтальных хорд, проходящих выше центра диска.