Уравнение состояния

Уравнение состояния идеального газа — это уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT.$$

Газы везде считаются идеальными. Важно помнить о полезной модификации уравнения состояния, которая получается делением его на V:

$$p = \frac{\rho}{\mu}RT.$$

Задача 1. (*«Физтех», 2011*) Из баллона со сжатым газом израсходовали часть газа. Известно, что давление в баллоне уменьшилось в 3 раза, отношение начальной и конечной масс баллона с газом равно 5/4, отношение начальной и конечной температур (по шкале Кельвина) равно 11/10. Какую часть от начальной массы баллона с газом составляет начальная масса газа?

$\boxed{6/19}$

Задача 2. (*«Физтех», 2011*) Воздушные шарики заполняются из баллона со сжатым газом. Объём одного шарика в $k = 10$ раз меньше объёма баллона. Сколько шариков было надуто, если давление в баллоне упало с $p_1 = 50$ атм до $p_2 = 30$ атм? Считать, что температура в баллоне и шариках успевает сравняться с температурой окружающей среды, а давление в шариках равно $p_0 = 1$ атм.

$\boxed{N = \frac{p_1 - p_2}{p_0}k = 200}$

Задача 3. (*«Физтех», 2011*) К пустому сосуду подсоединили через редуктор баллон со сжатым газом. Давление в сосуде стало равно $p = 2$ атм. Объём сосуда в $k = 5$ раз меньше объёма баллона. Найти разность начального и конечного давлений в баллоне. Считать, что температура в баллоне успевает стать равной температуре окружающей среды.

$\boxed{p_1 - p_2 = \frac{p}{k} = 0{,}4 \text{ атм}}$

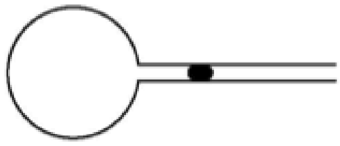
Задача 4. (*Всеросс., 2016, I этап, 11*) Горизонтальный цилиндрический сосуд разделён на две части поршнем, способным свободно перемещаться вдоль сосуда без трения. В начальный момент поршень делит сосуд на две равные части, в каждой из которых находится идеальный газ при температуре T_0 и давлении p_0. До какой температуры T нужно нагреть газ в правой части сосуда, чтобы занимаемый им объём стал в 3 раза больше, чем объём, занимаемый газом слева от поршня? Температура газа слева от поршня поддерживается постоянной.

$\boxed{T = 3T_0}$

Задача 5. (*«Физтех», 2015, 10*) Поршень, который может двигаться в горизонтальном цилиндре без трения, делит его объём на две части. В одной части находится $m_1 = 1$ г водорода, а в другой — $m_2 = 7$ г азота. Температуры газов одинаковые. Какую часть объёма цилиндра занимает водород? Молярные массы водорода и азота: $\mu_1 = 2$ г/моль, $\mu_2 = 28$ г/моль.

$\boxed{2/3}$

Задача 6. (*«Физтех», 2015, 10*) В тонкостенную колбу впаяна длинная тонкая стеклянная трубка постоянного внутреннего сечения (см. рисунок). В трубке находится капелька ртути, отделяющая воздух в колбе от окружающего воздуха. Изменение температуры окружающего воздуха при постоянном атмосферном давлении приводит к смещению капельки — получаем газовый термометр. При температуре $t_1 = 17\,^\circ\mathrm{C}$ капелька находится на расстоянии $L_1 = 20$ см от колбы, а при температуре $t_2 = 27\,^\circ\mathrm{C}$ — на расстоянии $L_2 = 30$ см. Чему равна длина трубки, если максимальная температура, которую можно измерить этим термометром, $t_3 = 47\,^\circ\mathrm{C}$? Атмосферное давление считать неизменным.



$\boxed{L = L_1 + \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}(L_2 - L_1) = 50 \text{ см}}$

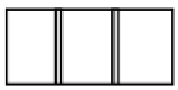
Задача 7. (*«Росатом», 2013, 11*) Цилиндрический сосуд с идеальным газом разделён подвижным поршнем на две части. Газ в левой части имеет температуру T_1, в правой — температуру T_2. При этом отношение объёмов оказывается равным $V_1/V_2 = 3/2$. После того как температуры выровнялись, соотношение объёмов изменилось: $V_1'/V_2' = 2/3$. Найти отношение температур T_1/T_2.

$\boxed{\frac{T_1}{T_2} = \frac{9}{4}}$

Задача 8. (*МФТИ, 1995*) Горизонтально расположенный закрытый цилиндрический сосуд с гладкими стенками разделён подвижным теплонепроницаемым поршнем на две части, в которых находятся различные идеальные газы с одинаковой температурой $T_0 = 300$ К. Объём, занимаемый одним из газов, в $\alpha = 3$ раза больше объёма другого газа. Газ в большем объёме нагревают, и он увеличивает свой объём на $\beta = 1/20$ объёма всего сосуда. На сколько увеличилась температура этого газа, если температура в другой части сосуда поддерживается постоянной и равной T_0?

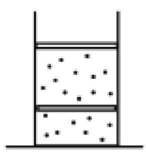
$\boxed{\Delta T = T_0 \frac{\beta(\alpha+1)^2}{\alpha(1-\beta-\alpha\beta)} = 100 \text{ К}}$

Задача 9. (*«Росатом», 2014, 10*) Горизонтальный цилиндрический сосуд длины l разделен на три равные части двумя подвижными теплонепроницаемыми поршнями. Первоначально температура газа во всех частях сосуда равна T_0. На какое расстояние передвинутся поршни, если в левой части сосуда температуру повысить до значения $2T_0$, а в остальных частях поддерживать равной T_0?



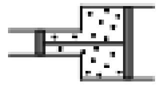
$\boxed{\text{Левый поршень сдвинется на } \frac{l}{6}, \text{ правый — на } \frac{l}{12}}$

Задача 10. (*«Росатом», 2014, 11*) Цилиндрический сосуд закрыт двумя массивными одинаковыми подвижными поршнями. Газа между поршнями нет. Из-за неплотных контактов между стенками и нижним поршнем газ медленно просачивается в пространство между поршнями. Известно, что когда нижний поршень оказался на высоте h от дна сосуда, верхний был на расстоянии $2h$ от нижнего. На какой высоте от дна будет верхний поршень, когда нижний поршень окажется на дне? Температура постоянна. Контакты между верхним поршнем и стенками плотные, трения нет. Атмосферным давлением пренебречь.



$\boxed{\text{На высоте } 4h}$

Задача 11. (*«Росатом», 2011, 11*) Две открытые с обоих концов в атмосферу трубы с площадями сечений S_1 и S_2 ($S_1 < S_2$) состыкованы между собой. В них вставлены соединённые стержнем поршни, которые при температуре T_0 находятся на одинаковых расстояниях от стыка труб. Между поршнями находится идеальный газ. При какой температуре газа между поршнями правый поршень переместится влево на половину первоначального расстояния между ним и стыком труб? Ответ обосновать.



$T = \frac{3S_1+S_2}{2(S_1+S_2)} T_0$

Задача 12. (*«Курчатов», 2015, 10*) Герметичный теплонепроницаемый вертикальный цилиндрический сосуд разделён массивным теплонепроницаемым горизонтальным тонким поршнем, скользящим вдоль стенок без трения. В обеих частях сосуда находится один и тот же идеальный газ. Известно, что при температуре T в обеих частях сосуда поршень делит сосуд в отношении $2:1$, считая от его верхнего торца. Если перевернуть сосуд и нагреть оказавшийся под поршнем газ до температуры $4T$, а температуру второй части оставить неизменной, то поршень вновь разделит сосуд в отношении $2:1$, считая от верхнего торца. Чему равно отношение масс газов, разделённых поршнем?

$1:3$

Задача 13. (*«Курчатов», 2014, 10*) Юный экспериментатор изучает зависимость давления идеального газа от температуры. Для этого он изготовил сосуд, заполненный воздухом при атмосферном давлении $p = 10^5$ Па (при таких условиях с хорошей точностью можно считать, что воздух — идеальный газ). К сосуду подсоединён манометр, и имеется возможность измерять температуру воздуха внутри сосуда, помещая сосуд в воду. К сожалению, из-за неопытности экспериментатора установка получилась негерметичной: она выпускает воздух, если разность давлений внутри и снаружи превысит некоторое критическое значение Δp. Сначала газ в сосуде медленно нагрели до температуры $T_1 = 323$ К, затем медленно охладили. При этом давление в сосуде оказалось на $\Delta p_1 = 3$ кПа меньше атмосферного. Какую разность давлений Δp_2 измерит юный экспериментатор, если проделает тот же эксперимент, только нагревая газ до температуры $T_2 = 353$ К? Начальное давление газа вновь равно атмосферному. Изменением объёма сосуда при всех происходящих в эксперименте процессах можно пренебречь.

$\Delta p_2 = p\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) + \Delta p_1 \frac{T_1}{T_2} = 11{,}2$ кПа

Задача 14. (*МФО, 2015, 10*) В нижней части вертикального цилиндрического сосуда, разделённого подвижным лёгким поршнем, находится аргон. Верхняя часть сосуда полностью заполнена водой массой $m = 1$ кг и открыта в атмосферу. При температуре $t_1 = 27\,^\circ$C поршень расположен на высоте, составляющей $1/4$ высоты сосуда. После нагревания всей системы до температуры $t_2 = 127\,^\circ$C равновесие достигается при расположении поршня на $1/2$ высоты сосуда. Найдите площадь S поперечного сечения сосуда и высоту H сосуда. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Абсолютный нуль считайте равным $t_0 = -273\,^\circ$C, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

$S = \frac{mg}{p_0\left(\frac{2T_1}{T_2} - 1\right)} = 2$ см^2; $H = \frac{4p_0}{3\rho g}\left(\frac{2T_1}{T_2} - 1\right) \approx 6{,}7$ м

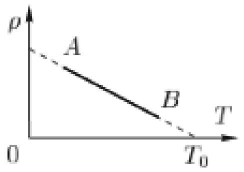
Задача 15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Идеальный газ участвует в процессе, в котором его температура изменяется от T_0 до $5T_0$, а график зависимости давления от температуры — парабола

$$p = p_0 \left(1 + \frac{T^2}{4T_0^2}\right).$$

Плотность газа в конце процесса равна $\rho_к$. Чему равна минимальная плотность газа в этом процессе?

$\frac{20}{29}\rho_к$

Задача 16. (*Всеросс., 2010, регион, 10*) Идеальный газ в количестве ν моль участвует в процессе AB, изображённом на рисунке в координатах $\rho(T)$, где ρ — плотность газа, а T — его температура. При каких условиях (температуре) давление газа на 25% меньше максимального? Температура T_0 известна.



При $T_1 = T_0/4$ и $T_2 = 3T_0/4$

Задача 17. (*МФТИ, 1997*) Найти массу кислорода, содержащегося в атмосфере Земли. Известно, что температура воздуха вблизи поверхности Земли $T = 290$ К, радиус Земли $R_З = 6370$ км, а ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Масса кислорода, содержащегося в одном литре воздуха, взятого у поверхности Земли, $\rho = 0{,}26$ г/л. Процентное содержание кислорода (по массе) в атмосфере Земли считать постоянным. Толщина атмосферы много меньше радиуса планеты.

$m = \frac{4\pi R_З^2 \rho RT}{\mu g} \approx 10^{12}$ кг

Задача 18. (*МФО, 2013, 10*) Оцените температуру в центре Солнца. Считайте, что плотность вещества Солнца постоянна, а в центре Солнца атомы водорода полностью распадаются на протоны и электроны, образуя плазму с молярной массой $\mu = 0{,}5$ г/моль, для которой можно использовать уравнение идеального газа. Первая космическая скорость для Солнца (скорость движения спутника вблизи поверхности Солнца) составляет $v = 400$ км/с. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

$T \approx \frac{\mu v^2}{2R} \approx 5 \cdot 10^6$ К; годится любой ответ $T \sim \frac{\mu v^2}{R}$

Задача 19. (*Всеросс., 2013, регион, 11*) В вертикальном цилиндре сечения S тяжёлый поршень массы m лежит на шероховатом дне при открытых отверстиях в верхнем и нижнем торцах, так, что в цилиндре находится ν_0 моль воздуха. Отверстия закрывают и переворачивают цилиндр. После этого открывают отверстие в верхнем торце и дожидаются установления равновесия. Затем отверстие закрывают и ещё раз переворачивают цилиндр. Снова открывают верхнее отверстие, дожидаются установления равновесия, и так далее.

Определите максимальное количество воздуха, оказавшееся в цилиндре.

Какое количество воздуха ν окажется в цилиндре после многократного повторения процедуры переворачивания?

Атмосферное давление p_0, температура постоянна, трение между поршнем и цилиндром отсутствует. Ускорение свободного падения g.

$\nu_{\max} = \nu_0 \frac{p_0S+2mg}{p_0S+mg}$; $\nu = 2\nu_0 \frac{p_0S+mg}{2p_0S+mg}$

Задача 20. (*МФТИ, 1994*) Транспортный баллон с гелием имеет массу 61,6 кг при температуре 27 °C и давлении гелия внутри, равном 200 атмосфер. Часть гелия была использована, чтобы надуть резиновые шарики объёмом 4 л каждый. Масса оставшегося гелия с баллоном при температуре −3 °C оказалась равной 60,6 кг, а давление в баллоне — 70 атмосфер. Найти объём транспортного баллона и количество надутых шариков, если давление в них равно 1 атмосфере.

$V = \frac{RT_1T_2\Delta M}{\mu(p_1T_2-p_2T_1} \approx 50$ л; $N = \frac{RT_1\Delta M}{\mu p_0 V_0} \approx 1560$ шариков

Задача 21. (*МФТИ, 1994*) В переносном газовом баллоне объёмом $V = 5$ л может поместиться не больше $m = 2{,}2$ кг жидкого пропана (C_3H_8) под давлением 16 атмосфер и при температуре 17 °C. Сколько пропана в газообразном состоянии останется в баллоне, если из полного баллона израсходовать 80% пропана?

$m_{\text{г}} = 0{,}8m\left(\frac{mRT}{\mu pV} - 1\right)^{-1} \approx 125$ г

Задача 22. (*МФТИ, 1993*) В модели адиабатической атмосферы температура воздуха меняется с высотой h по линейному закону: $T = T_0 - 2\mu gh/7R$, где $T_0 = 273$ K (температура поверхности земли), $\mu = 29$ г/моль — средняя молярная масса воздуха, $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · K) — газовая постоянная. В той же модели температура T и плотность ρ на высоте h связаны с температурой T_0 и плотностью ρ_0 у поверхности земли формулой $T^5/\rho^2 = T_0^5/\rho_0^2$. Найти массу воздуха, содержащегося в 1 литре, взятом на высоте Эльбруса $H = 5{,}5$ км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях.

$\rho = \frac{\mu p_0}{RT_0}\left(1 - \frac{2\mu gH}{7RT_0}\right)^{5/2} \approx 0{,}7$ кг/м^3, так что $m \approx 0{,}7$ г

Задача 23. (*МФО, 2014, 10–11*) На Тритоне, спутнике планеты Нептун, давление воздуха, состоящего в основном из азота (молярная масса 28 г/моль), составляет 1,5 Па, температура −235 °C. Ускорение свободного падения на поверхности спутника 0,78 м/с^2. Абсолютный нуль составляет −273 °C, универсальная газовая постоянная 8,3 Дж/(моль · K), одному молю соответствует $6 \cdot 10^{23}$ частиц.

A) Определите массу воздуха в одном кубическом метре у поверхности Тритона. Ответ представьте в граммах и округлите до второй значащей цифры.

B) Какой высоты должна быть льдинка (плотность 0,9 г/см^3) в форме прямоугольного параллелепипеда, чтобы она создавала на поверхность Тритона такое же давление, что и воздух? Ответ представьте в миллиметрах и округлите до второй значащей цифры.

C) Сколько молекул воздуха содержится в кубике длиной ребра 4 микрометра? Ответ округлите до второй значащей цифры.

D) Представим, что имеется прямоугольный параллелепипед, в основании которого — квадрат с длиной стороны 0,1 нанометра (один нанометр — это миллиардная доля метра), порядка размера молекулы. Какой высоты должен быть параллелепипед, чтобы в него в среднем попадала одна молекула? Ответ представьте в миллиметрах и округлите до второй значащей цифры. Полученное Вами значение по порядку величины равно длине свободного пробега — расстоянию, которую молекула проходит между двумя последовательными столкновениями.

A) 0,13; B) 2,1; C) 180000; D) 35