Уравнение колебаний. 2

Уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

можно получить, дифференцируя по времени закон сохранения энергии. Покажем это на простейшем примере горизонтального пружинного маятника.

Пусть положение равновесия маятника совпадает с началом координат $x = 0$. Тогда координата x маятника в процессе колебаний равна по модулю величине деформации пружины. Сумма кинетической энергии маятника и потенциальной энергии деформированной пружины не меняется со временем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}.$$

Дифференцируем по времени это равенство:

$$\frac{m}{2} \cdot 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{k}{2} \cdot 2x\dot{x} = 0.$$

Полученное равенство нулю должно выполняться в любой момент времени, поэтому можно сократить на $\dot{x}$:

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

откуда

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Видим, что $\omega^2 = \frac{k}{m}$, и тогда период колебаний пружинного маятника $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

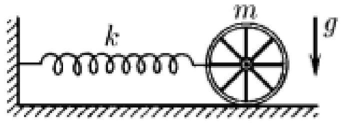
Задача 1. Выведите формулу $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ для периода колебаний математического маятника путём дифференцирования закона сохранения энергии.

Задача 2. Выведите формулу Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ для периода колебаний в LC-контуре путём дифференцирования закона сохранения энергии.

Задача 3. (*МФТИ, 1995*) Определить период малых колебаний в вертикальной плоскости небольшого тела массы m с зарядом q внутри непроводящей сферы радиуса R, если в верхней точке сферы закреплён одноимённый точечный заряд Q. Внутренняя поверхность сферы гладкая. Ускорение свободного падения g.

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g + \frac{kqQ}{8mR^2}}}}$$

Задача 4. Пружина жёсткости k одним концом присоединена к оси колеса массы m, которое способно катиться без проскальзывания, а другим прикреплена к стенке. Найдите период колебаний системы. Масса колеса однородно распределена по ободу.



$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}}$$

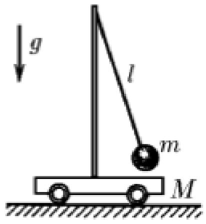
Задача 5. По дну цилиндрической лунки радиусом R катается без проскальзывания полый цилиндр радиусом r ($r < R$). Найдите период малых колебаний цилиндра.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(R-r)}{g}}$

Задача 6. Найдите период колебаний тонкого обруча радиуса R, подвешенного на гвозде. Колебания происходят в плоскости обруча. Проскальзывания нет.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$

Задача 7. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массой M с установленным на ней математическим маятником длины l и массой m. Найдите период малых колебаний системы.

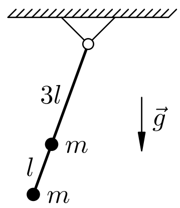


$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{M}{M+m}}$

Задача 8. (*МФТИ, 2006*) Маятник представляет собой шарнирно прикреплённый к потолку жёсткий лёгкий стержень длины $4l$, на котором закреплены два маленьких груза массой m каждый (см. рисунок). Трением в шарнире и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

1) Стержень отклоняют на угол $\varphi_0 = 60^\circ$ от вертикали и отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость движения нижнего груза.

2) Найдите период колебаний маятника при малых отклонениях от положения равновесия.

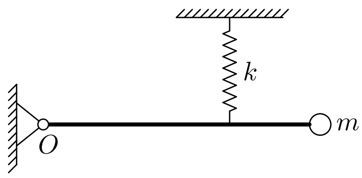


1) $v_m = \frac{4}{5}\sqrt{7gl}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{25l}{7g}}$

Задача 9. (*МФТИ, 1996*) Конструкция из жёстко соединённых лёгкого стержня и небольшого по размерам шарика массой m может совершать колебания в вертикальной плоскости под действием пружины с жёсткостью k, двигаясь при вращении без трения вокруг горизонтальной оси O (см. рисунок). Пружина лёгкая, её точка прикрепления к стержню делит его длину в отношении 1 : 2, считая от шарика. В положении равновесия стержень горизонтален, а ось пружины вертикальна.

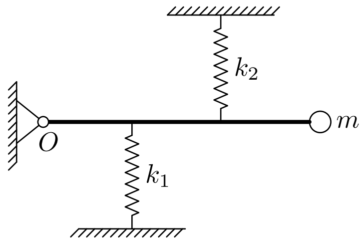
1) Найти удлинение пружины в положении равновесия системы.

2) Найти период малых колебаний конструкции.



1) $L = \frac{3mg}{2k}$; 2) $T = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача 10. (*МФТИ, 1996*) Конструкция из жёстко соединённых лёгкого стержня и небольшого шарика массой m может совершать колебания под действием двух пружин с жёсткостями k_1 и k_2, двигаясь при вращении без трения вокруг вертикальной оси O по гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Пружины лёгкие, их оси горизонтальны, а точки прикрепления к стержню делят его на три равные части. В положении равновесия оси пружин перпендикулярны стержню, и пружина с жёсткостью k_1 растянута на величину L_1.

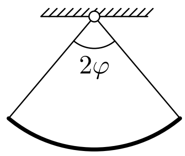


1) Найти деформацию второй пружины в положении равновесия.

2) Найти период малых колебаний конструкции.

1) $L_2 = \frac{k_1 L_1}{2k_2}$; 2) $T = 6\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+4k_2}}$

Задача 11. (*МФТИ, 1996*) Металлический прут в форме дуги окружности радиусом L висит на двух лёгких нитях длины L каждая (см. рисунок). Масса прута равна m, его поперечное сечение постоянно. Угол между нитями равен 2φ.

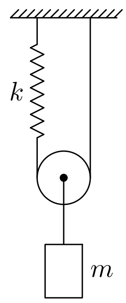


1) Найти силу натяжения нитей в положении равновесия.

2) Найти период малых колебаний такой «дуги» в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью «дуги».

1) $F = \frac{mg}{2\cos\varphi}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L\varphi}{g\sin\varphi}}$

Задача 12. (*МФТИ, 1996*) Груз массой m подвешен с помощью пружины жёсткостью k, лёгких нитей и невесомого блока (см. рисунок).

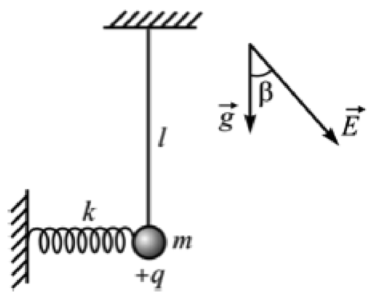


1) Найти удлинение пружины в положении равновесия системы.

2) Найти период вертикальных колебаний груза при условии непровисания нитей.

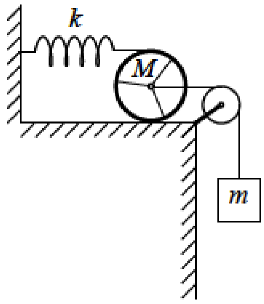
1) $\frac{mg}{2k}$; 2) $T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача 13. (*МОШ, 2011, 11*) На тонкой непроводящей нити длиной l подвешен маленький шарик массой m, который заряжен зарядом $+q$. Слева к шарику прикреплена непроводящая пружинка жёсткостью k, расположенная горизонтально. Шарик находится в однородном электрическом поле E, направленном так, как показано на рисунке. В состоянии равновесия нить с шариком висит вертикально. Найти период малых колебаний шарика в плоскости рисунка.



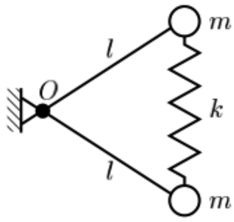
$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l} + \frac{qE\cos\beta}{ml}}}$

Задача 14. (*МОШ, 2017, 11*) Найти собственную частоту малых колебаний груза m в системе, изображённой на рисунке. Обруч M катается без проскальзывания, массой спиц по сравнению с массой обруча пренебречь.



$\omega = \sqrt{\frac{4k}{2M+m}}$

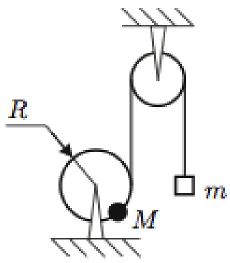
Задача 15. (*Всеросс., 2009, РЭ, 11*) Период малых колебаний системы (рис.) около положения равновесия равен $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, где m — масса каждого из шариков, а k — жёсткость пружины. Соединение лёгких стержней шарнирное и закреплено в точке O. Найдите длину L пружины в нерастянутом состоянии.



$L = l\sqrt{2}$

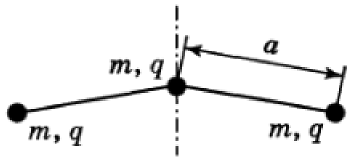
Задача 16. (*Всеросс., 2013, РЭ, 11*) Два лёгких блока соединены нерастяжимой лёгкой нитью (см. рисунок). На краю нижнего блока радиуса R закреплена точечная масса M, соединённая с нитью. К другому концу нити прикреплён груз m, причём $M > m$.

Найдите период T малых колебаний системы около положения равновесия.



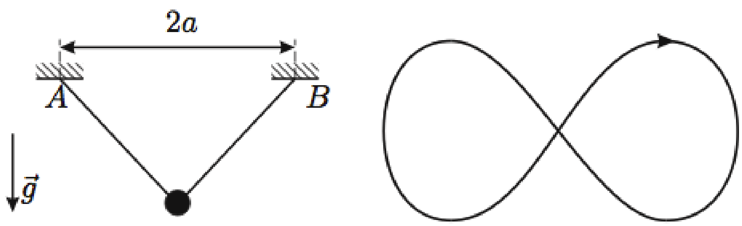
$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt[4]{\frac{M+m}{M-m}}$

Задача 17. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 11*) На гладкой горизонтальной непроводящей поверхности расположены три небольших по размерам шарика массой m и зарядом q каждый, связанные двумя нерастяжимыми непроводящими нитями длиной a каждая. Шарики удерживают в положении, когда нити составляют угол, близкий к 180° (рис.). Затем шарики отпускают. Найдите период свободных малых колебаний системы.



$T = 2\pi\sqrt{\frac{4ma^3}{3kq^2}}$

Задача 18. (*Всеросс., 2000, финал, 11*) К двум точкам A и B, находящимся на одной горизонтали, между которыми расстояние $2a$, прикреплена тонкая лёгкая нерастяжимая нить длиной $2l$ (рис. слева). По нити без трения скользит маленькая тяжёлая бусинка. Ускорение свободного падения g.



1) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\perp$ в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.

2) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_{\parallel}$ в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.

3) При каком отношении l/a траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь вид, представленный на рис. справа?

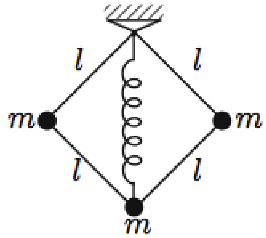
Примечание. При решении задачи Вам может оказаться полезной формула

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \ldots$$

при $x \ll 1$.

1) $\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{g}{b}}$; 2) $\omega_{\parallel} = \frac{\sqrt{gb}}{l}$ (здесь $b = \sqrt{l^2 - a^2}$); 3) $a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$

Задача 19. (*Всеросс., 2003, финал, 11*) Конструкция (рис.) состоит из трёх одинаковых маленьких шариков массой m каждый, шарнирно соёдиненных лёгкими спицами длины l. В положении равновесия конструкция удерживается вертикальной пружиной жёсткости k и имеет форму квадрата.



1) Найдите длину l_0 недеформированной пружины.

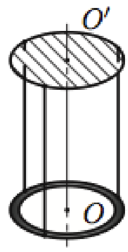
2) Пусть нижний шарик смещён по вертикали (вверх или вниз) на малое (по сравнению с l) расстояние x. Определите изменение $\Delta E_{\text{пот}}$ потенциальной энергии системы.

3) Пусть нижнему шарику сообщена вертикально направленная скорость v. Определите кинетическую энергию $\Delta E_{\text{кин}}$ системы.

4) Определите период T малых вертикальных колебаний нижнего шарика.

$l_0 = l\sqrt{2} - \frac{2mg}{k}$; $\Delta E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2}$; $\Delta E_{\text{кин}} = mv^2$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$

Задача 20. (*Всеросс., 2011, финал, 11*) Массивное кольцо подвешено на трёх тонких вертикальных нитях длиной L (рис.).



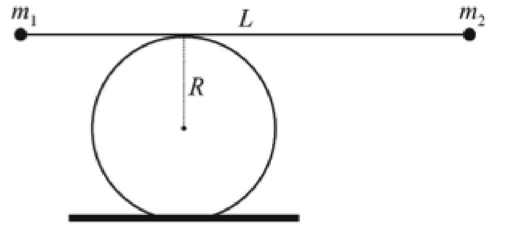
1) Определите период малых крутильных колебаний кольца относительно оси OO'.

2) Насколько изменится период крутильных колебаний, если в центре кольца (точка O) при помощи лёгких спиц расположить тело малых размеров (материальную точку), масса которого равна массе кольца?

Указание: При $\alpha \ll 1$ можно использовать приближённое выражение $\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$.

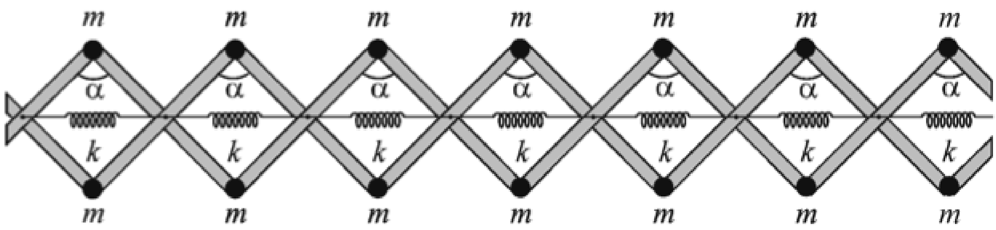
1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$; 2) $T' = \frac{T}{\sqrt{2}}$

Задача 21. (*МОШ, 2017, 11*) Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 закрепелены на концах тонкого жёсткого очень лёгкого стержня длиной L. Этот стержень покоится на поверхности шероховатого горизонтального неподвижно закреплённого цилиндра радиусом R. В положении равновесия стержень горизонтален и перпендикулярен оси цилиндра (на рисунке показан вид со стороны торца цилиндра). Стержень поворачивают на малый угол таким образом, что он движется относительно цилиндра без проскальзывания, и отпускают. После этого начинаются колебания, в процессе которых стержень катается по поверхности цилиндра также без проскальзывания, а шарики движутся в плоскости рисунка. Чему равен период этих колебаний? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



$$\boxed{T = \frac{2\pi L}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{m_1 m_2}{gR}}}$$

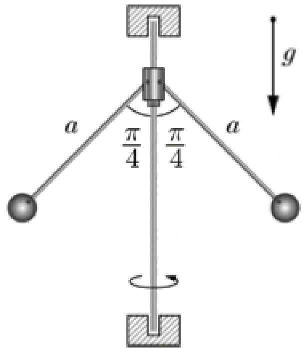
Задача 22. (*МОШ, 2015, 11*) Шарнирная конструкция состоит из очень большого числа N периодически повторяющихся одинаковых звеньев (см. рисунок).



Каждое звено включает в себя пружину, концы которой прикреплены к серединам двух пар скрещенных реек, два сферических шарнирных блока и четыре половинки самих реек. Шарнирные блоки дают возможность рейкам свободно вращаться в пространстве. Жёсткость каждой из пружин равна k, масса каждого из шарнирных блоков равна m, все остальные элементы невесомы, трения нигде нет. Когда пружины не деформированы, рейки образуют между собой угол α. Концы этой конструкции соединили между собой, образовав большое кольцо, так, что пружины расположились вокруг цилиндрической поверхности. Получившаяся система колеблется таким образом, что в каждый момент времени все пружины сжаты или растянуты одинаково. Найдите период этих колебаний вокруг положения равновесия, считая их малыми. Система находится в невесомости.

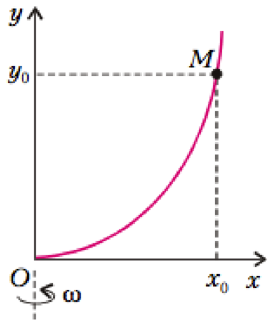
$$\boxed{T = N\sqrt{\frac{2m}{k}}}$$

Задача 23. (*МОШ, 2018, 11*) На рисунке изображена упрощённая модель центробежного регулятора. Два одинаковых тяжёлых груза при помощи лёгких жёстких стержней с длинами a и шарниров соединены с вращающимся валом, ось которого вертикальна. Конструкция шарниров позволяет стержням свободно отклоняться от этой оси, однако грузы и вал вращаются с одинаковой угловой скоростью ω, которая поддерживается постоянной при помощи внешнего привода. Установившиеся при вращении равновесные положения стержней таковы, что угол между стержнями равен 90°. Определите период малых колебаний грузов относительно положения равновесия при вращении. Трения в шарнирах и в подшипниках крепления вала нет. Размеры грузов малы по сравнению с длиной стержней.



$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{g}}}$$

Задача 24. (*Всеросс., 2002, финал, 11*) Гладкая проволока изогнута так, что если совместить ось Oy с одной её частью, то другая часть проволоки будет совпадать с графиком функции $y = ax^3$ при $x > 0$ (рис.). Проволока равномерно вращается вокруг вертикальной оси Oy с угловой скоростью ω. На неё надета бусинка M, которая может скользить вдоль проволоки с пренебрежимо малым трением. Найдите координаты x_0 и y_0 равновесного положения бусинки и период T малых колебаний относительно этого положения.



$$\boxed{x_0 = \frac{\omega^2}{3ag},\ y_0 = \frac{\omega^6}{27a^2g^3};\ T = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1 + \frac{\omega^8}{9a^2g^4}}}$$

Задача 25. (*Всеросс., 1997, финал, 11*) Горизонтально расположенная упругая пружина массой M под действием силы, равной её весу Mg, растягивается (или сжимается) на величину Δx_0.

1) Чему будет равно удлинение данной пружины, если её подвесить за один конец (без груза)?

2) Чему будет равен период колебаний груза массой m, скреплённого с одним из концов данной пружины, если второй конец пружины неподвижен, а груз скользит по гладкой горизонтальной поверхности?

Деформация пружины во всех случаях мала по сравнению с длиной недеформированной пружины.

$$\boxed{1)\ \Delta x = \frac{\Delta x_0}{2};\ 2)\ T = 2\pi\sqrt{\frac{\left(m + \frac{M}{3}\right)\Delta x_0}{Mg}}}$$