

Уравнение колебаний. 2

Уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

можно получить, дифференцируя по времени закон сохранения энергии. Покажем это на простейшем примере горизонтального пружинного маятника.

Пусть положение равновесия маятника совпадает с началом координат $x = 0$. Тогда координата x маятника в процессе колебаний равна по модулю величине деформации пружины. Сумма кинетической энергии маятника и потенциальной энергии деформированной пружины не меняется со временем:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const.}$$

Дифференцируем по времени это равенство:

$$\frac{m}{2} \cdot 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{k}{2} \cdot 2x\dot{x} = 0.$$

Полученное равенство нулю должно выполняться в любой момент времени, поэтому можно сократить на \dot{x} :

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

откуда

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Видим, что $\omega^2 = \frac{k}{m}$, и тогда период колебаний пружинного маятника $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

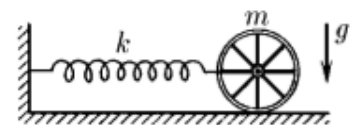
ЗАДАЧА 1. Выведите формулу $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ для периода колебаний математического маятника путём дифференцирования закона сохранения энергии.

ЗАДАЧА 2. Выведите формулу Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ для периода колебаний в LC -контуре путём дифференцирования закона сохранения энергии.

ЗАДАЧА 3. (*МФТИ, 1995*) Определить период малых колебаний в вертикальной плоскости небольшого тела массы m с зарядом q внутри непроводящей сферы радиуса R , если в верхней точке сферы закреплён одноимённый точечный заряд Q . Внутренняя поверхность сферы гладкая. Ускорение свободного падения g .

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sqrt{\frac{m}{k}} = T$$

ЗАДАЧА 4. Пружина жёсткости k одним концом присоединена к оси колеса массы m , которое способно катиться без проскальзывания, а другим прикреплена к стенке. Найдите период колебаний системы. Масса колеса однородно распределена по ободу.



$$\frac{q}{m\omega^2} \sqrt{\frac{m}{k}} = T$$

ЗАДАЧА 5. По дну цилиндрической лунки радиусом R катается без проскальзывания полый цилиндр радиусом r ($r < R$). Найдите период малых колебаний цилиндра.

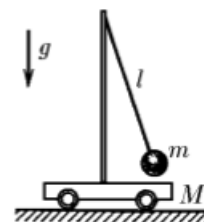
$$\frac{6}{(2-R)r} \sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{g} = T$$

ЗАДАЧА 6. Найдите период колебаний тонкого обруча радиуса R , подвешенного на гвозде. Колебания происходят в плоскости обруча. Проскальзывания нет.

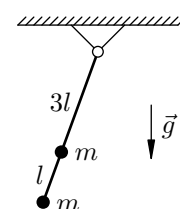
$$\frac{6}{\sqrt{5R}} \sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{g} = T$$

ЗАДАЧА 7. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массой M с установленным на ней математическим маятником длины l и массой m . Найдите период малых колебаний системы.

$$\frac{m+M}{M} \sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{\frac{g}{l}} = T$$



ЗАДАЧА 8. (МФТИ, 2006) Маятник представляет собой шарнирно прикреплённый к потолку жёсткий лёгкий стержень длины $4l$, на котором закреплены два маленьких груза массой m каждый (см. рисунок). Трением в шарнире и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

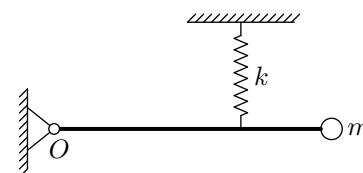


1) Стержень отклоняют на угол $\varphi_0 = 60^\circ$ от вертикали и отпускают без толчка. Найдите максимальную скорость движения нижнего груза.

2) Найдите период колебаний маятника при малых отклонениях от положения равновесия.

$$\frac{6l}{19g} \sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{g} = T \quad (\tau : \sqrt{6l} \sqrt{\frac{6}{5}} = \omega \text{ (I)})$$

ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 1996) Конструкция из жёстко соединённых лёгкого стержня и небольшого по размерам шарика массой m может совершать колебания в вертикальной плоскости под действием пружины с жёсткостью k , двигаясь при вращении без трения вокруг горизонтальной оси O (см. рисунок). Пружина лёгкая, её точка прикрепления к стержню делит его длину в отношении $1 : 2$, считая от шарика. В положении равновесия стержень горизонтален, а ось пружины вертикальна.

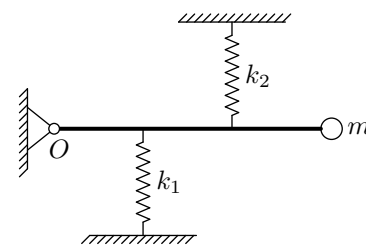


1) Найти удлинение пружины в положении равновесия системы.

2) Найти период малых колебаний конструкции.

$$\frac{9}{11} \sqrt{\frac{6}{5}} \sqrt{g} = T \quad (\tau : \sqrt{\frac{9l}{5}} = T \text{ (I)})$$

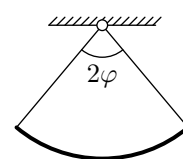
Задача 10. (МФТИ, 1996) Конструкция из жёстко соединённых лёгкого стержня и небольшого шарика массой m может совершать колебания под действием двух пружин с жёсткостями k_1 и k_2 , двигаясь при вращении без трения вокруг вертикальной оси O по гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Пружины лёгкие, их оси горизонтальны, а точки прикрепления к стержню делят его на три равные части. В положении равновесия оси пружин перпендикулярны стержню, и пружина с жёсткостью k_1 растянута на величину L_1 .



- 1) Найти деформацию второй пружины в положении равновесия.
- 2) Найти период малых колебаний конструкции.

$$\frac{2k_1 L_1 + k_2 L}{m} \sqrt{L} \omega = L \left(\omega : \frac{2k_1 L_1}{m} = \omega \right) \quad (1)$$

Задача 11. (МФТИ, 1996) Металлический прут в форме дуги окружности радиусом L висит на двух лёгких нитях длины L каждая (см. рисунок). Масса прута равна m , его поперечное сечение постоянно. Угол между нитями равен 2φ .

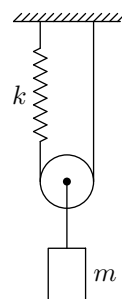


- 1) Найти силу натяжения нитей в положении равновесия.
- 2) Найти период малых колебаний такой «дуги» в вертикальной плоскости, совпадающей с плоскостью «дуги».

$$\frac{\phi \sin \phi}{L} \sqrt{L} \omega = L \left(\omega : \frac{\phi \cos \phi}{L} = \omega \right) \quad (1)$$

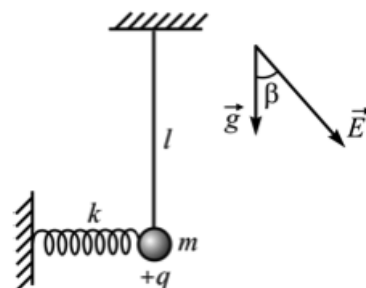
Задача 12. (МФТИ, 1996) Груз массой m подвешен с помощью пружины жёсткостью k , лёгких нитей и невесомого блока (см. рисунок).

- 1) Найти удлинение пружины в положении равновесия системы.
- 2) Найти период вертикальных колебаний груза при условии непровисания нитей.



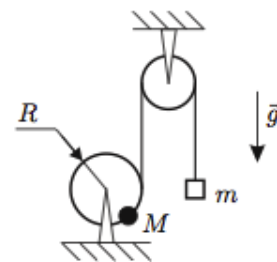
$$\frac{m}{L} \sqrt{L} \omega = L \left(\omega : \frac{m}{L} = \omega \right) \quad (1)$$

Задача 13. (МОШ, 2011, 11) На тонкой непроводящей нити длиной l подвешен маленький шарик массой m , который заряжен зарядом $+q$. Слева к шарiku прикреплена непроводящая пружинка жёсткостью k , расположенная горизонтально. Шарик находится в однородном электрическом поле E , направленном так, как показано на рисунке. В состоянии равновесия нить с шариком висит вертикально. Найти период малых колебаний шарика в плоскости рисунка.



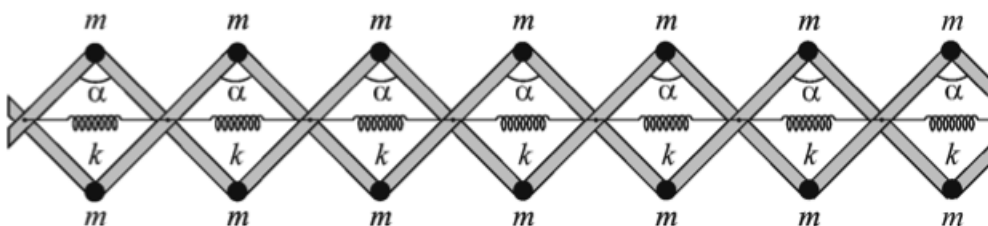
$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{k + \frac{m}{\cos \beta}}} = L$$

ЗАДАЧА 14. (Всеросс., 2013, РЭ, 11) Два лёгких блока соединены нерастяжимой лёгкой нитью (см. рисунок). На краю нижнего блока радиуса R закреплена точечная масса M , соединённая с нитью. К другому концу нити прикреплен груз m , причём $M > m$.



$$\frac{\omega - \sqrt{N}}{\omega + \sqrt{N}} \sqrt{\frac{b}{H}} \sqrt{\frac{g}{L}} = J$$

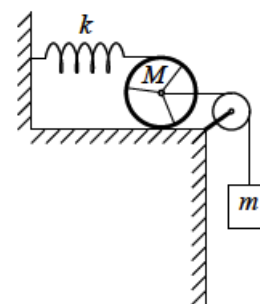
ЗАДАЧА 15. (МОШ, 2015, 11) Шарнирная конструкция состоит из очень большого числа N периодически повторяющихся одинаковых звеньев (см. рисунок).



Каждое звено включает в себя пружину, концы которой прикреплены к серединам двух пар скрещенных реек, два сферических шарнирных блока и четыре половинки самих реек. Шарнирные блоки дают возможность рейкам свободно вращаться в пространстве. Жёсткость каждой из пружин равна k , масса каждого из шарнирных блоков равна m , все остальные элементы невесомы, трения нигде нет. Когда пружины не деформированы, рейки образуют между собой угол α . Концы этой конструкции соединили между собой, образовав большое кольцо, так, что пружины расположились вокруг цилиндрической поверхности. Получившаяся система колеблется таким образом, что в каждый момент времени все пружины сжаты или растянуты одинаково. Найдите период этих колебаний вокруг положения равновесия, считая их малыми. Система находится в невесомости.

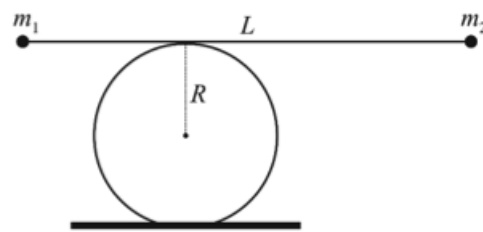
$$\frac{\omega}{\omega_0} \sqrt{N} = J$$

ЗАДАЧА 16. (МОШ, 2017, 11) Найти собственную частоту малых колебаний груза m в системе, изображённой на рисунке. Обруч M катается без проскальзывания, массой спиц по сравнению с массой обруча пренебречь.



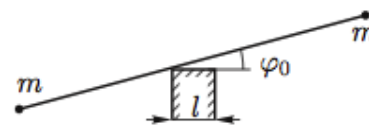
$$\frac{\omega + \sqrt{N}}{\omega} \sqrt{\frac{g}{L}} = J$$

ЗАДАЧА 17. (МОШ, 2017, 11) Два маленьких шарика массами m_1 и m_2 закреплены на концах тонкого жёсткого очень лёгкого стержня длиной L . Этот стержень покоится на поверхности шероховатого горизонтального неподвижно закреплённого цилиндра радиусом R . В положении равновесия стержень горизонтален и перпендикулярен оси цилиндра (на рисунке показан вид со стороны торца цилиндра). Стержень поворачивают на малый угол таким образом, что он движется относительно цилиндра без проскальзывания, и отпускают. После этого начинаются колебания, в процессе которых стержень катается по поверхности цилиндра также без проскальзывания, а шарики движутся в плоскости рисунка. Чему равен период этих колебаний? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



$$\frac{g^6}{\varepsilon_{ii} \nu_{ii}} \wedge \frac{\varepsilon_{ii} + \nu_{ii}}{T^2 \nu^2} = L$$

ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 2013, финал, 11) На концах лёгкой спицы длины L закреплены два одинаковых маленьких металлических шарика (рис.). Спицу поставили на подставку ширины $l \ll L$ так, что её середина оказалась над серединой подставки, и отклонили на небольшой угол $\varphi_0 \ll 1$. Определите период малых колебаний спицы, если при переходе спицы с одного ребра на другое потери энергии пренебрежимо малы, а спица от подставки не отрывается и не проскальзывает.



$$\frac{l^6}{\nu^2} \wedge T^2 \nu = L$$