Уравнение колебаний. 1

Уравнение гармонических колебаний
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$
можно получить из второго закона Ньютона $ma_x = F_x$.

Задача 1. (*«Курчатов», 2014, 11*) Однородный цилиндрический поплавок массой m и площадью сечения S плавает вертикально в стакане с водой. Поплавок слегка утопили, а затем отпустили, в результате чего поплавок начал колебаться. Найдите период этих колебаний. Плотность воды ρ, ускорение свободного падения g.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}}}$

Задача 2. Найдите период малых колебаний жидкости в U-образной трубке постоянного сечения. Длина части сосуда, занятой жидкостью, равна l.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}}$

Задача 3. На большой плоской пластине равномерно распределён отрицательный заряд с поверхностной плотностью σ. Однородный стержень массой m и длиной l, по которому равномерно распределён положительный заряд q, вставлен в небольшое отверстие пластины и может двигаться перпендикулярно пластине. Найдите период колебаний стержня. Размеры стержня много меньше размеров пластины. Силы тяжести нет.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0 m l}{\sigma q}}}$

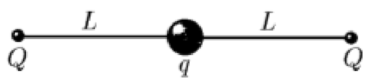
Задача 4. (*МФО, 2016, 11*) Гладкий стержень длины L и массы M находится в невесомости. На стержень надета маленькая бусинка, масса которой гораздо меньше массы стержня. Определите период малых колебаний бусинки вблизи центра стержня. Гравитационная постоянная равна G.

$\boxed{T = \pi\sqrt{\frac{L^3}{2GM}}}$

Задача 5. (*Всеросс., 2017, РЭ, 11*) В глубинах вселенной вдали от всех тяготеющих масс находится тонкий однородный стержень длины $L = 10$ м и массой $M = 1{,}0$ кг. По нему без трения может скользить бусинка массой $m = 0{,}1$ кг. В начальный момент бусинка слегка смещена относительно центра стержня и система неподвижна. Через какое время τ бусинка впервые достигнет середины стержня? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

$\boxed{\tau = \frac{\pi L}{4}\sqrt{\frac{L}{2G(M+m)}} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ с}}$

Задача 6. Бусинка с положительным зарядом q может двигаться без трения по натянутой нити длины $2L$, на концах которой закреплены положительные заряды Q. Найдите период малых колебаний бусинки, если её масса равна m.



$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 m L^3}{qQ}}}$

Задача 7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Два маленьких шарика с зарядами $+q$ каждый надеты на непроводящий вертикальный стержень. Нижний шарик закреплён, а верхний может свободно скользить по стержню. Расстояние между шариками в положении равновесия равно L. Найдите период малых колебаний верхнего шарика. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения g.

$$T = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}$$

Задача 8. Два одинаковых маленьких шарика с зарядами $\pm q$ жёстко связаны невесомым стержнем длины l и находятся в однородном электрическом поле E. Стержень может вращаться без трения вокруг своего центра. Масса шарика равна m.

а) Опишите положение устойчивого равновесия системы. Найдите период малых колебаний системы относительно положения устойчивого равновесия.

б) Найдите максимальную скорость шариков, если амплитуда малых колебаний шариков равна x_0.

а) $T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2qE}}$; б) $v_0 = x_0\sqrt{\frac{2qE}{ml}}$

Задача 9. Определите время полёта камня от одного полюса Земли до другого по прямому тоннелю, прорытому через центр. Плотность Земли считать постоянной. Радиус Земли принять равным $R = 6400$ км.

$\tau = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42$ мин

Задача 10. (*МФТИ, 1995*) В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд q, равный по модулю заряду электрона, равномерно распределён внутри шара радиуса R. Чему будет равен период колебаний (внутри шара вдоль диаметра) электрона, помещённого в такой шар? Масса электрона m.

$$T = \frac{4\pi R}{q}\sqrt{\pi\varepsilon_0 R m}$$

Задача 11. (*МФТИ, 2003*) В проекте из области фантастики предлагается прорыть между Москвой и Парижем прямолинейный железнодорожный тоннель длиной $S = 2400$ км. Вагон ставят на рельсы в начале тоннеля в Париже и отпускают без начальной скорости.

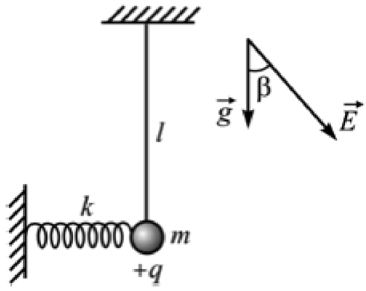
1) Через какое время вагон достигнет середины тоннеля?

2) Найдите скорость вагона в середине тоннеля.

Землю считать шаром радиуса $R = 6400$ км с одинаковой плотностью по всему объёму. Вращение Земли, сопротивление воздуха и все виды трения при движении не учитывать.

1) $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 21$ мин; 2) $v = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{g}{R}} \approx 1{,}5$ км/с

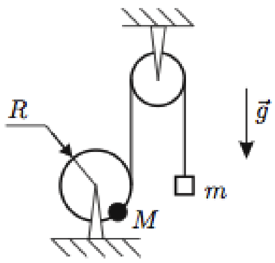
Задача 12. (*МФО, 2011, 11*) На тонкой непроводящей нити длиной l подвешен маленький шарик массой m, который заряжен зарядом $+q$. Слева к шарику прикреплена непроводящая пружинка жёсткостью k, расположенная горизонтально. Шарик находится в однородном электрическом поле E, направленном так, как показано на рисунке. В состоянии равновесия нить с шариком висит вертикально. Найти период малых колебаний шарика в плоскости рисунка.



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l} + \frac{qE\cos\beta}{ml}}}$$

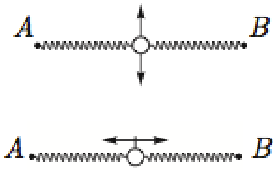
Задача 13. (*Всеросс., 2013, РЭ, 11*) Два лёгких блока соединены нерастяжимой лёгкой нитью (см. рисунок). На краю нижнего блока радиуса R закреплена точечная масса M, соединённая с нитью. К другому концу нити прикреплён груз m, причём $M > m$.

Найдите период T малых колебаний системы около положения равновесия.



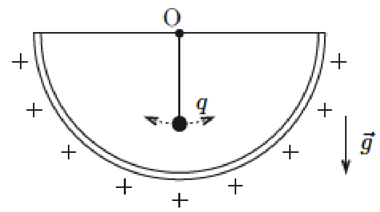
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\sqrt[4]{\frac{M+m}{M-m}}$$

Задача 14. (*Всеросс., 2014, финал, 11*) Тонкую невесомую пружину, растянутую на некоторую величину Δl_1, закрепили на гладком горизонтальном столе в точках A и B. Отношение периодов малых поперечных (верхний рисунок) и продольных (нижний рисунок) колебаний небольшого грузика, расположенного посередине пружины, равно $n_1 = 4$. После того как деформацию пружины увеличили на $\Delta x = 3{,}5$ см, отношение периодов стало равно $n_2 = 3$. Найдите длину нерастянутой пружины l_0, а также значение деформации Δl_1 в первом и деформации Δl_2 во втором случаях. Считайте, что пружина в условиях опыта подчиняется закону Гука.



$$l_0 = \frac{(n_1^2-1)(n_2^2-1)}{n_1^2-n_2^2}\Delta x = 60 \text{ см}; \ \Delta l_1 = \frac{(n_2^2-1)}{n_1^2-n_2^2}\Delta x = 4 \text{ см}; \ \Delta l_2 = \frac{(n_1^2-1)}{n_1^2-n_2^2}\Delta x = 7{,}5 \text{ см}$$

Задача 15. (*Всеросс., 2015, финал, 11*) По поверхности закреплённой диэлектрической полусферы равномерно распределён положительный электрический заряд. Ось симметрии полусферы вертикальна. В точке О, совпадающей с центром кривизны полусферы, закреплён математический маятник в виде небольшого шарика с зарядом q_1, висящего на нити, длина которой меньше радиуса полусферы (см. рисунок). Период гармонических колебаний шарика вблизи положения равновесия, в котором нить вертикальна, равен T. После того, как заряд шарика изменили так, что он стал равен q_2, причём $|q_2/q_1| = 2$, период гармонических колебаний шарика вблизи нового положения равновесия, в котором нить тоже вертикальна, снова оказался равным T. Найдите числовое значение T, если известно, что период гармонических колебаний маятника в незаряженной чаше $T_0 = 1{,}0$ с. Поле поляризационных зарядов не учитывайте.



Если $q_1 > 0$, то $T = T_0\sqrt{3} = 1{,}73$ с; если $q_1 < 0$, то $T = T_0/\sqrt{3} = 0{,}58$ с

Задача 16. (*Всеросс., 2017, финал, 11*) Заряд Q равномерно распределён по поверхности диэлектрической тонкостенной закреплённой трубы радиуса R и длиной H. Бусинка с тем же по знаку зарядом может свободно скользить по тонкой непроводящей спице, совпадающей с диаметром серединного (равноудаленного от торцов) сечения.

Найдите период T малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Удельный заряд бусинки $\gamma = q/m$ считать известным.

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2L^3}{kQ\gamma}}}$$