Упругие взаимодействия

При упругом взаимодействии тел (в частности, при упругом ударе) не происходит изменений в их внутреннем состоянии; внутренняя энергия тел не меняется, а значит — сохраняется их суммарная механическая энергия.

Кроме того, обычно сохраняется также импульс системы или его проекция на некоторую ось. Поэтому в задачах на упругие взаимодействия нужно решать систему уравнений, выражающих законы сохранения импульса и энергии.

Центральный удар

Задача 1. Шар, движущийся поступательно со скоростью v_0 по горизонтальной поверхности, налетает на такой же покоящийся шар. Происходит упругий центральный удар. Найдите скорости шаров после удара.

$\boxed{v_1 = 0,\ v_2 = v_0}$

Задача 2. (*МФТИ, 1993*) Брусок, двигавшийся по горизонтальной поверхности стола со скоростью v_0, сталкивается с неподвижным бруском вдвое большей массы. На какое расстояние разъедутся бруски после столкновения? Удар упругий, центральный. Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ.

$\boxed{L = \frac{5v_0^2}{18\mu g}}$

Задача 3. (*МФТИ, 1993*) Брусок, двигавшийся по горизонтальной поверхности стола со скоростью v_0, сталкивается с неподвижным бруском вчетверо меньшей массы. На какое расстояние разъедутся бруски после столкновения? Удар упругий, центральный. Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ.

$\boxed{L = \frac{11v_0^2}{10\mu g}}$

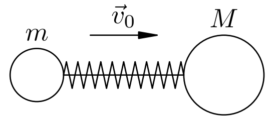
Задача 4. (*МОШ, 2018, 10*) Два тела массами 100 г и 300 г, соединённые невесомой пружиной жёсткости 750 Н/м, движутся со скоростью 5 м/с по гладкому горизонтальному столу к абсолютно упругой стенке. Пружина в процессе движения горизонтальна и её ось перпендикулярна стенке. Найдите максимальную деформацию пружины после абсолютно упругого отражения от стенки тела массой 300 г.

$\boxed{x = v\sqrt{\frac{3(m_1+m_2)}{4k}} = 10 \text{ см}}$

Задача 5. (*«Курчатов», 2017, 10*) Два маленьких бруска движутся по горизонтальной поверхности стола навстречу друг другу. Масса первого бруска $m_1 = m$, масса второго — $m_2 = 2m$. Бруски сталкиваются. На какое расстояние L разъедутся бруски после удара? Непосредственно перед ударом модуль скорости первого бруска равен $v_1 = 2v$, второго бруска — $v_2 = v$. Удар абсолютно упругий и лобовой, движение брусков поступательное. Коэффициенты трения брусков о стол одинаковы и равны μ, ускорение свободного падения g.

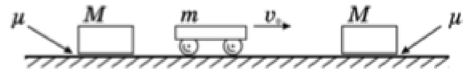
$\boxed{L = \frac{5v^2}{2\mu g}}$

Задача 6. (*МФТИ, 1992*) Между шариками массами m и M, связанными нитью, вставлена лёгкая пружина жёсткостью k, сжатая на некоторую величину. Система шариков движется со скоростью v_0 вдоль прямой, проходящей через центры шариков (см. рисунок). Нить пережигают, и один из шариков останавливается. Найти начальную величину сжатия пружины.



$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1+\frac{m}{M}\right)$

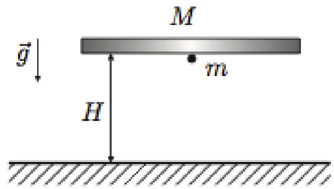
Задача 7. (*Всеросс., 2018, РЭ, 10*) На горизонтальной поверхности покоятся два бруска массой M каждый. Между брусками помещают тележку массой m ($m = M/3$) и сообщают ей начальную скорость v_0. Найдите, насколько сдвинутся бруски в результате абсолютно упругих столкновений с тележкой, если за время между столкновениями они успевают останавливаться. Время соударения тележки с брусками бесконечно мало. Коэффициент трения между брусками и полом равен μ. Ускорение свободного падения g.



Правый — на $\frac{2v^2}{15\mu g}$, левый — на $\frac{v^2}{30\mu g}$

Задача 8. (*Всеросс., 2012, РЭ, 11*) Над поверхностью земли находится пластина массой M. Между ней и землёй движется шарик массой m. В момент любого столкновения пластины с шариком высота пластины над землёй равна H, как будто пластина просто «висит» (см. рисунок). Все удары абсолютно упругие.

Считая, что пластина всегда параллельна поверхности земли и может двигаться только вертикально, найдите кинетическую энергию K шарика у поверхности земли при условии $m \ll M$. (Скорость шарика при всех столкновениях с пластиной одна и та же.)

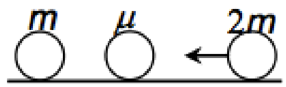


$K = \frac{(M+m)^2 gH}{2M+m} \approx \frac{1}{2}MgH$

Задача 9. (*МОШ, 2016, 11*) Вдоль гладкой горизонтальной поверхности скользит шар неизвестной массы в направлении другого покоящегося шара массой 120 г. В некоторый момент времени происходит абсолютно упругое лобовое соударение этих шаров, в результате которого первый шар передаёт второму 64% своей кинетической энергии. Опыт повторяют, заменив движущийся шар шаром другой массы, но не изменив его начальной скорости. Оказалось, что в результате второго опыта доля переданной покоящемуся шару кинетической энергии не изменилась. Определите, на какую величину Δm отличались массы движущихся шаров в двух опытах.

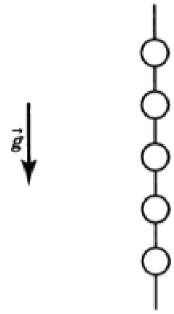
$\Delta m = 450$ г

Задача 10. (*«Росатом», 2013, 11*) Имеются три шара с массами m, μ и $2m$. Шар массой $2m$ движется, остальные шары покоятся (см. рисунок). Происходят центральные упругие столкновения шаров. При каком значении массы μ шар массой m будет иметь после столкновения с шаром μ максимальную скорость?



$\mu = m\sqrt{2}$

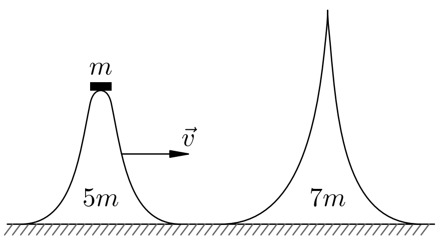
Задача 11. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 10*) Система тел состоит из пяти одинаковых маленьких упругих бусинок, которые могут свободно скользить по бесконечному вертикальному стержню без трения (рис.). Каждой бусинке сообщают начальную скорость. Какое наибольшее число столкновений бусинок друг с другом возможно, если все начальные скорости имеют различное значение и могут быть направлены как в ту, так и в другую сторону?



$\boxed{10}$

Горки, трубки, каналы

Задача 12. (*«Физтех», 2008*) Горка массой $5m$ с покоящейся на её вершине шайбой массой m скользит со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности стола в направлении покоящейся незакреплённой горки массой $7m$ (см. рисунок). От незначительного толчка шайба съезжает с горки, горка останавливается, а шайба движется по столу в направлении горки массой $7m$.



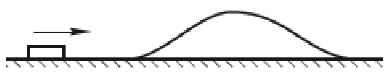
1) Найдите высоту горки массой $5m$.

2) На какую максимальную высоту сможет подняться шайба на горке массой $7m$?

Поверхности горок гладкие. Горки имеют плавный переход к поверхности стола. Шайба не отрывается от поверхности горок, а поступательно движущиеся горки — от стола. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.

$\boxed{1)\ h = \frac{15v^2}{g};\ 2)\ x = \frac{63v^2}{4g}}$

Задача 13. (*Всеросс., 2011, финал, 9*) Небольшая шайба, скользящая по гладкой горизонтальной поверхности, наезжает на гладкую горку, покоящуюся на той же поверхности (рис.). После того как шайба соскользнула с горки, оказалось, что шайба и горка движутся по гладкой горизонтальной поверхности с одинаковыми по модулю скоростями.



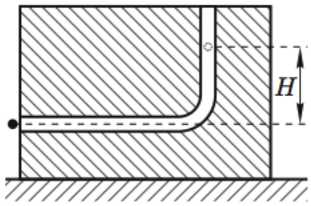
1) Определите, при каком соотношении масс шайбы и горки это возможно.

2) Найдите отношение максимальной потенциальной энергии, которая была у шайбы во время подъёма на горку, к начальной кинетической энергии шайбы.

Примечание. Во время подъёма и спуска шайба не отрывается от горки.

$\boxed{1)\ 1/3;\ 2)\ 3/4}$

Задача 14. (*Всеросс., 2007, ОЭ, 10*) Брусок массой M покоится на гладкой горизонтальной поверхности. В бруске просверлен тонкий канал, состоящий из трёх участков: горизонтального, вертикального и плавно их соединяющего изогнутого участка (рис.). В канал влетает с некоторой горизонтальной скоростью маленький шарик массой m. В процессе движения шарик поднимается до максимальной высоты H в вертикальном канале. Определите скорости v_1 шарика и v_2 бруска сразу после того как шарик выскользнет из канала. Трение не учитывайте.

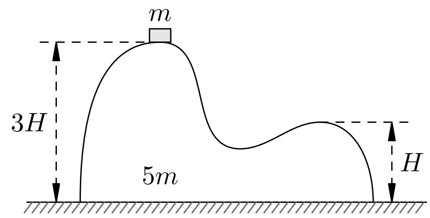


$v_1 = \frac{m-M}{m+M}\sqrt{\frac{2gH(M+m)}{M}}$, $v_2 = \frac{2m}{m+M}\sqrt{\frac{2gH(M+m)}{M}}$

Задача 15. (*МФТИ, 1997*) На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка с двумя вершинами, высоты которых H и $3H$. На левой вершине горки находится шайба массой m (см. рисунок). Масса горки $5m$, её поверхность гладкая. От незначительного толчка вправо шайба приходит в движение. Найти скорость шайбы на правой вершине, если:

1) горка закреплена на столе;
2) горка не закреплена.

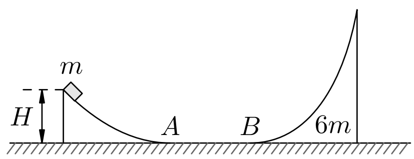
Считать, что при движении шайба не отрывается от поверхности горки, а поступательно движущаяся горка — от стола.



1) $v = 2\sqrt{gH}$; 2) $v = \sqrt{\frac{10}{3}gH}$

Задача 16. (*МФТИ, 1997*) На гладкой горизонтальной поверхности стола покоятся две горки с гладкими поверхностями, плавно переходящими в поверхность стола (см. рисунок). Горка A закреплена на столе, и на ней на высоте H удерживают шайбу массой m. Масса горки B равна $6m$. Шайбу отпускают. Найти максимальную высоту (считая от стола) подъёма шайбы на горке B, если:

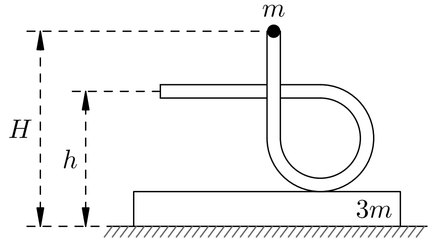
1) горка B закреплена на столе;
2) горка B не закреплена.



1) $h = H$; 2) $h = \frac{6}{7}H$

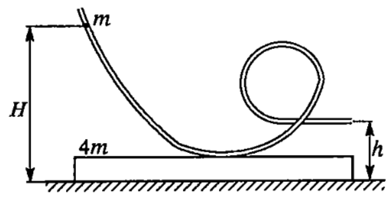
Задача 17. (*МФТИ, 1997*) Трубка в виде петли укреплена на платформе, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Нижний конец трубки горизонтален и находится на расстоянии h от стола. Шарик массой m, который может скользить по трубке без трения, удерживается на высоте H от стола. Масса платформы с трубкой равна $3m$. Найти скорость вылетевшего из трубки шарика, если:

1) платформа закреплена на столе;
2) платформа не закреплена и после вылета шарика движется поступательно.



1) $v = \sqrt{2g(H-h)}$; 2) $v = \sqrt{\frac{3}{2}g(H-h)}$

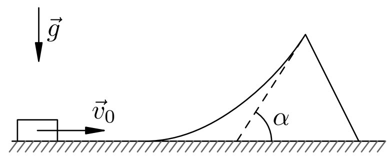
Задача 18. (*МФТИ, 1997*) Трубка в виде петли жёстко укреплена на платформе, находящейся на гладкой горизонтальной поверхности стола. Правый конец трубки горизонтален, его расстояние до стола равно h. В трубке на высоте H удерживается шарик массой m, который может скольдить по трубке без трения (см. рисунок). Масса платформы с трубкой $4m$. Система покоится. Шарик отпускают. Найти скорость вылетевшего из трубки шарика, если:



1) платформа закреплена на столе;
2) платформа не закреплена и после вылета шарика движется поступательно.

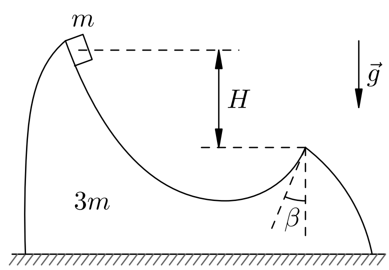
1) $v = \sqrt{2g(H-h)}$; 2) $v = \sqrt{\frac{8}{5}g(H-h)}$

Задача 19. (*МФТИ, 2002*) Шайба массой m скользит со скоростью v_0 по гладкой горизонтальной поверхности стола, попадает на покоящийся клин массой $2m$, скользит по нему без трения и отрыва и покидает клин (см. рисунок). Клин, не отрывавшийся от стола, приобретает скорость $v_0/4$. Найти угол α наклона к горизонту поверхности верхней части клина. Нижняя часть клина имеет плавный переход к поверхности стола. Изменением потенциальной энергии шайбы в поле тяжести при её движении по клину пренебречь. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.



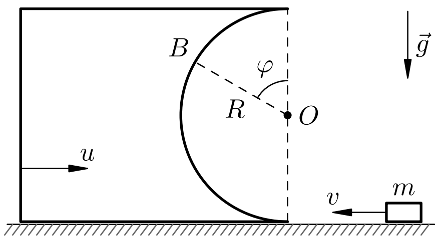
$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{11}}$

Задача 20. (*МФТИ, 2002*) На вершине покоящейся на гладком горизонтальном столе горки массой $3m$ удерживают шайбу массой m (см. рисунок). Шайбу отпускают, и она скользит по горке без трения и отрыва и покидает горку. Горка, не отрывавшаяся от стола, приобретает скорость u. Найти разность высот H между вершинами горки. Верхняя часть поверхности правой вершины горки наклонена к вертикали под углом $\beta = 30°$. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.



$H = \frac{2u^2}{g}(3 + 4\operatorname{ctg}^2\beta) = \frac{30u^2}{g}$

Задача 21. (*МФТИ, 2005*) Брусок с выемкой в форме полуцилиндра радиусом R движется со скоростью u по гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Небольшая по сравнению с размерами бруска монета массой m скользит по столу со скоростью v навстречу бруску, скользит далее по гладкой поверхности выемки, не отрываясь от неё, и оказывается в точке B, продолжая скользить по выемке вверх. Радиус OB составляет угол φ ($\cos\varphi = 2/3$) с вертикалью. Масса бруска намного больше массы монеты.



1) Найдите скорость монеты относительно бруска в точке B.
2) Найдите силу давления монеты на брусок в точке B.

1) $v_B = \sqrt{(v+u)^2 - \frac{10}{3}gR}$; 2) $N = m\left(\frac{(v+u)^2}{R} - 4g\right)$

Удар по клину

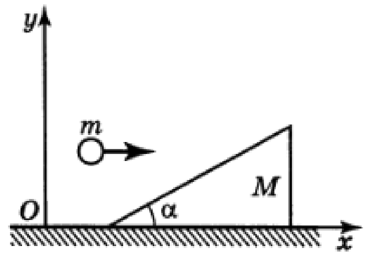
Задача 22. (*МОШ, 2011, 10*) На гладкой горизонтальной поверхности находится жёсткий клин массой M, причём его гладкая наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. На этот клин налетает жёсткий шарик массой m, у которого за мгновение до столкновения с наклонной поверхностью клина скорость была горизонтальной. Происходит абсолютно упругий удар. При каком отношении m/M шарик после удара будет двигаться в вертикальном направлении?

$m/M = 1 - \operatorname{ctg}^2\alpha$

Задача 23. (*МОШ, 2011, 11*) На гладкой горизонтальной поверхности находится жёсткий клин массой M, причём его гладкая наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. На этот клин налетает жёсткий шарик той же массы M, у которого за мгновение до столкновения с наклонной поверхностью клина скорость была горизонтальной. Происходит абсолютно упругий удар. Какой угол β с горизонтом составит скорость шарика сразу после удара?

$\beta = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)$

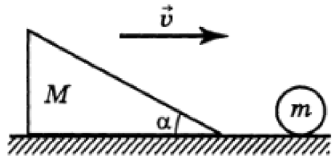
Задача 24. (*Всеросс., 1997, ОЭ, 10*) На гладкой горизонтальной поверхности массивной плиты покоится клин массой M и углом наклона $\alpha = 30°$ (рис.). Клин плотно прилегает к поверхности плиты. Шар массой m летит горизонтально и ударяется о гладкую наклонную поверхность клина (удар упругий). В результате клин начинает двигаться по плите. Найдите отношение m/M, если через некоторое время шар попадает в ту же точку на клине, от которой он отскочил.



$\frac{m}{M} = \operatorname{ctg}^2\alpha - 1 = 2$

Задача 25. (*Всеросс., 1994, финал, 10*) На гладком горизонтальном столе лежит шар массы m. С шаром упруго сталкивается клин массы $M = m/2$, движущийся углом вперёд со скоростью $v = 5$ м/с (рис.). Определите время, через которое шар опять столкнётся с клином. Угол клина $\alpha = 30°$.

Указание. Задачу решать в предположении, что импульс передаётся клину только в горизонтальном направлении.

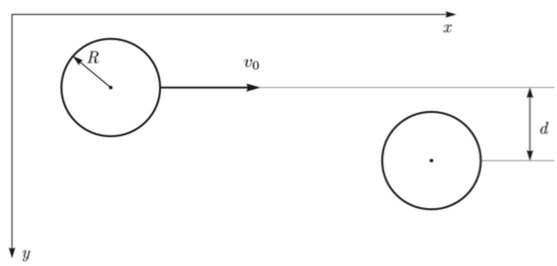


$\boxed{\tau = \frac{2v}{g\sqrt{3}} \approx 0{,}6 \text{ с}}$

Нецентральный удар

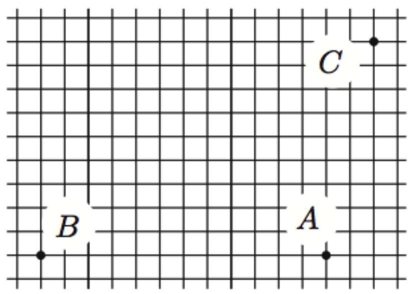
Задача 26. Шар, движущийся поступательно со скоростью v_0 по горизонтальной поверхности, налетает на такой же покоящийся шар. Происходит упругий нецентральный удар. Докажите, что шары разлетятся под прямым углом.

Задача 27. (*Всеросс., 2015, РЭ, 10*) На гладкой горизонтальной поверхности находятся две одинаковые гладкие шайбы радиуса R. Одной из шайб сообщают скорость v_0 вдоль оси x (см. рисунок). При каком значении прицельного параметра d проекция на ось y скорости второй шайбы после абсолютно упругого удара максимальна?



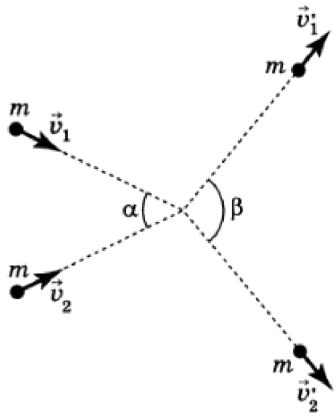
$\boxed{d = R\sqrt{2}}$

Задача 28. (*Всеросс., 2007, финал, 10*) На горизонтальной плоскости находятся два одинаковых диска с гладкой боковой поверхностью. Первый покоился, а второму сообщили скорость v. Найдите скорости дисков после их упругого соударения, используя рисунок, где отмечены положение центра первого диска до столкновения (A) и положения центров первого и второго дисков в один и тот же момент времени после столкновения (точки B и C соответственно). Трением пренебречь.



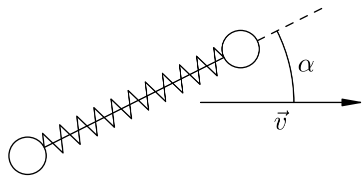
$\boxed{v_1 = \frac{4}{5}v,\ v_2 = \frac{3}{5}v}$

Задача 29. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 10*) Два одинаковых маленьких шарика упруго сталкиваются (рис.). Известны их скорости v_1 и v_2 до столкновения и угол α между ними (причём $v_1 \neq v_2$). Найдите максимально возможный угол β разлёта частиц после столкновения.



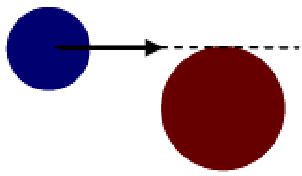
$\beta_{\max} = \arccos\left(\frac{2v_1v_2\cos\alpha}{v_1^2+v_2^2}\right)$

Задача 30. (*МФТИ, 1992*) Грузы с одинаковыми массами связаны нитью. Между ними вставлена лёгкая пружина жёсткостью k, сжатая на величину x_0. Грузы движутся со скоростью v вдоль прямой, составляющей угол α с осью системы (см. рисунок). После пережигания нити один из грузов полетел перпендикулярно первоначальному направлению движения. Найти массу груза.



$m = \frac{kx_0^2\cos^2\alpha}{2v^2}$

Задача 31. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Гладкая цилиндрическая шайба покоится на гладкой горизонтальной поверхности. В неё врезается шайба, изготовленная из того же материала, той же высоты, радиус которой в $n = 1{,}5$ раза меньше, чем у покоящейся. Линия движения центра налетающей шайбы касается боковой поверхности покоящейся. Под какими углами к направлению движения налетающей шайбы будут двигаться шайбы после упругого удара?



Первая: $\alpha = \arcsin\frac{3}{5} \approx 37^\circ$; вторая: $\beta = \operatorname{arctg}\frac{20}{39} + \arccos\frac{3}{5} \approx 80^\circ$

Система отсчёта центра масс

Задача 32. Шар, движущийся со скоростью v_0, налетает на покоящийся шар такой же массы. Происходит упругий центральный удар. Найдите скорости шаров после удара. (Решите задачу, перейдя в систему отсчёта, связанную с центром масс шаров.)

Первый шар остановится, второй получит скорость v_0

Задача 33. Шар массой m, движущийся со скоростью v_0, налетает на покоящийся шар массой M. Происходит упругий центральный удар. Найдите скорости шаров после удара. (Решите задачу, перейдя в систему отсчёта, связанную с центром масс шаров.)

$\boxed{v_1 = \frac{m-M}{m+M}v_0,\ v_2 = \frac{2m}{m+M}v_0}$

Задача 34. (*Всеросс., 2005, ОЭ, 9*) Небольшая шайба, движущаяся со скоростью v_1 по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на вторую шайбу, лежащую неподвижно, и после абсолютно упругого удара отскакивает со скоростью v_2 в противоположном направлении. Найдите скорость V второй шайбы после удара. Массы шайб не заданы, но известно, что они различны.

$\boxed{V = v_1 - v_2}$

Задача 35. (*Всеросс., 2005, ОЭ, 10*) Небольшая шайба, движущаяся по гладкой горизонтальной поверхности, налетела на вторую шайбу, покоившуюся на той же поверхности. После абсолютно упругого удара шайб их скорости v_1 и v_2 оказались направлены под углом φ друг к другу. Найдите скорость v_0 первой шайбы до удара. Массы шайб не заданы, но известно, что они различны.

$\boxed{v_0 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\varphi}}$

Задача 36. (*«Физтех», 2011, 10*) На гладкой горизонтальной поверхности расположены неподвижный шарик массой $2m$ и движущийся со скоростью 6 м/с шарик массой m. Происходит центральный не вполне упругий удар, так что в тепло переходит только 3/4 энергии, которая перешла бы в тепло при абсолютно неупругом ударе. Найдите скорость (по модулю) налетающего шарика после удара. Ответ выразите в м/с.

$\boxed{0}$

Задача 37. (*Всеросс., 2004, ОЭ, 10*) Атомы A летят вдоль оси цилиндрического канала радиусом R и сталкиваются с практически неподвижными атомами B. Кинетическая энергия атомов A равна пороговой, так что при центральном ударе образуется молекула AB, которая далее движется со скоростью v. При нецентральном ударе реакция не идёт, то есть атомы сталкиваются упруго. За какое минимальное время t после столкновения атомы сорта B смогут от оси цилиндра попасть на стенку канала?

$\boxed{t = \frac{R}{v}}$