# Теорема единственности

Мы хорошо знаем, что если на уединённую проводящую сферу поместить электрический заряд, то он распределится по сфере *равномерно.* А почему, собственно, равномерно?

Прежде всего, напряжённость поля внутри проводника — и, в частности, внутри металлической сферы — должна равняться нулю. Можно строго доказать (попробуйте это сделать!), что при равномерном распределении заряда по поверхности сферы поле в любой точке внутри неё действительно обращается в нуль.

Однако возникает другой вопрос: а вдруг имеется какое-то другое распределение заряда, отличное от равномерного, при котором поле внутри уединённой сферы также равно нулю во всех точках? Это было бы не слишком приятно — тогда пришлось бы дополнительно разбираться, какое именно из подходящих распределений заряда реализуется в каждой конкретной ситуации. Но, к счастью, ответ на поставленный вопрос является отрицательным.

**Теорема единственности.** Электрический заряд распределяется по поверхности проводника единственным образом. Иначе говоря, для любой поверхности $S$, ограничивающей пространственную область $V$, существует единственная функция $\sigma(X)$, выражающая зависимость поверхностной плотности заряда $\sigma$ от точки $X \in S$, при которой напряжённость поля в любой точке области $V$ обращается в нуль.

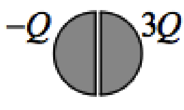
*Доказательство.* Предположим, что заряд $q$ может распределиться по поверхности проводника двумя способами: $\sigma(X)$ и $\sigma'(X)$. Тогда для заряда $-q$ также имеются два возможных распределения: $-\sigma(X)$ и $-\sigma'(X)$.

Рассмотрим функцию $\sigma''(X) = \sigma(X) - \sigma'(X)$. Она отвечает распределению по поверхности проводника нулевого заряда ($0 = q + (-q)$). Если $\sigma(X) \neq \sigma'(X)$, то поверхностная плотность $\sigma''(X)$ не во всех точках обращается в нуль; стало быть, на поверхности проводника возникают заряды: в одних местах — положительные, в других — отрицательные (ведь суммарный заряд проводника равен нулю). Внутри проводника поля нет, а снаружи оно появляется, и линии электрического поля, начинающиеся на положительных зарядах поверхности проводника, вынуждены заканчиваться на отрицательных зарядах этой же поверхности (а куда им деваться — ведь проводник уединённый, и никаких других зарядов вне проводника у нас нет).

И тут мы приходим к противоречию. С одной стороны, как нам хорошо известно, поверхность проводника является эквипотенциальной. Но с другой стороны, если перемещать пробный заряд вдоль линии поля, начинающейся на положительном заряде в точке $A$ поверхности проводника и заканчивающейся на отрицательном заряде в точке $B$ той же поверхности, то поле совершит ненулевую работу, и тогда потенциал в точке $B$ будет отличаться от потенциала в точке $A$. Полученное противоречие показывает, что на самом деле $\sigma(X) = \sigma'(X)$, то есть распределение заряда по поверхности проводника единственно. Теорема доказана.

Значение теоремы единственности состоит, в частности, вот в чём: если мы *угадали* распределение заряда по поверхности проводника, то именно это распределение в действительности и реализуется.

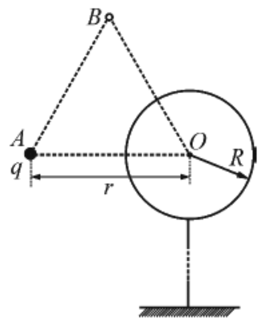
Задача 1. (*«Росатом», 2014, 11*) Два металлических одинаковых полушара радиуса $R$ расположены так, что между ними имеется очень небольшой зазор. Полушары заряжают зарядами $-Q$ и $3Q$ ($Q > 0$). Найти напряжённость электрического поля в зазоре между полушарами.




$\boxed{E = \frac{2Q}{\varepsilon_0 \pi R^2}}$

Задача 2. Вне проводника расположен заряд $Q$. Проводнику сообщают заряд $q$. Докажите, что заряд $q$ может распределиться по поверхности проводника единственным способом.

Задача 3. (*МФО, 2016, 11*) В точке $A$, расположенной на расстоянии $r$ от центра $O$ незаряженной проводящей сферы радиусом $R$, находится точечный заряд $q$. Сферу заземляют длинным тонким проводником. На сколько изменится (после заземления) потенциал $\varphi_B$ точки $B$, являющейся вершиной равностороннего треугольника $ABO$?




$\boxed{\Delta\varphi_B = -\frac{kqR}{r^2}}$