

## Системы материальных точек

Если тело можно считать материальной точкой, то мы пишем для него второй закон Ньютона. А как описывать движение тела, если оно не является материальной точкой? В таком случае можно рассмотреть тело как *систему материальных точек* — разбить его на достаточно малые части, записать второй закон Ньютона для каждой из этих частей, а потом все записанные уравнения просуммировать. Мы уже продемонстрировали такой подход в листке «Импульс» для системы из двух материальных точек, а теперь обобщим его на случай, когда количество точек в системе произвольно.

Итак, пусть имеется система точек с массами  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . На  $i$ -ю точку действуют, вообще говоря, силы двух видов.

1. *Внешние силы.* Это силы взаимодействия данной точки с телами, не входящими в систему (например, сила тяжести  $m_i \vec{g}$ , если наша система находится во внешнем поле тяготения). Равнодействующую внешних сил, приложенных к  $i$ -й точке, обозначим  $\vec{F}_i$ .
2. *Внутренние силы.* Это силы взаимодействия данной точки с остальными точками системы. Силу, действующую на  $i$ -ю точку со стороны  $j$ -й точки, обозначим  $\vec{T}_{ij}$ .

Второй закон Ньютона, записанный для  $i$ -й точки, будет иметь вид:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{T}_{ij} \quad (1)$$

(суммирование ведётся по индексу  $j$ , который пробегает значения от 1 до  $N$  за исключением значения  $i$  — ведь точка не взаимодействует «сама с собой»). Теперь суммируем выражения (1) по всем точкам системы (то есть по всем значениям  $i$  от 1 до  $N$ ):

$$\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{T}_{ij} \quad (2)$$

Левая часть формулы (2) равна

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \dots + \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_N)}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_N$  — суммарный вектор импульса нашей системы материальных точек.

В правой части (2), во-первых, имеем

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

— это векторная сумма внешних сил, приложенных к системе; во-вторых, сумма всех внутренних сил равна нулю:

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{T}_{ij} = \vec{0}$$

(так получается потому, что указанная сумма разбивается на пары слагаемых вида  $\vec{T}_{ij} + \vec{T}_{ji}$ , а каждая такая пара в сумме даёт нуль по третьему закону Ньютона). В результате получаем:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}. \quad (3)$$

Таким образом, скорость изменения импульса системы материальных точек равна сумме внешних сил, приложенных к системе.

Если система замкнута (не взаимодействует с другими телами), то  $\vec{F}_{\text{внеш}} = \vec{0}$ ; тогда из (3) получим и  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$ , то есть  $\vec{p} = \text{const}$ . Это — закон сохранения импульса для замкнутой системы материальных точек.

Если система не замкнута, то её импульс, вообще говоря, не сохраняется. Однако может случиться, что проекция равнодействующей внешних сил на некоторую ось  $x$  равна нулю. Тогда из (3) имеем  $\frac{dp_x}{dt} = 0$  и  $p_x = \text{const}$ , то есть сохраняется проекция вектора импульса системы на данную ось  $x$ .

**ЗАДАЧА 1.** (*Всеросс., 2014, МЭ, 10–11*) Приспособление, позволяющее человеку балансировать над поверхностью водоёма, состоит из платформы, к которой снизу подходит шланг. По этому шлангу насос, установленный на плавающей поблизости лодке, может прокачивать воду с максимальной скоростью  $v = 7$  м/с. Вода бьёт в платформу вертикально вверх, ударяется о платформу и разлетается горизонтально во все стороны. Внутренний радиус шланга  $r = 8$  см. Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Человека какой массой  $M$  способно удерживать это приспособление? Массой платформы и шлангов можно пренебречь. Предложите и разъясните способ управления высотой «полёта».

$$M \approx \frac{6}{g} \rho v^2 r = N$$

**ЗАДАЧА 2.** (*МФТИ, 1991*) Неподвижный снаряд разорвался на четыре осколка. Осколки массами  $m_1 = 3$  кг,  $m_2 = 2$  кг,  $m_3 = 4$  кг полетели соответственно со скоростями  $v_1 = 200$  м/с вертикально вверх,  $v_2 = 150$  м/с горизонтально на север и  $v_3 = 100$  м/с горизонтально на восток. Под каким углом к горизонту полетел четвёртый осколок?

$$\alpha \approx \frac{g}{9} \arctan \left( \frac{v_1(m_1 + m_2) + v_3 m_3}{v_2 m_2} \right) \arctan \alpha = \nu$$

**ЗАДАЧА 3.** (*«Росатом», 2016, 11*) Три точечных тела, заряженные разными зарядами, но имеющие одинаковые массы, представляют собой замкнутую систему. В некоторый момент времени тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение одного из них (неизвестно какого — крайнего или среднего) равно  $a$ , второго (тоже неизвестно какого) —  $3a$ . Найти ускорение третьего тела в этот момент. Между телами действуют только кулоновские силы.

$$4a \text{ или } 2a$$