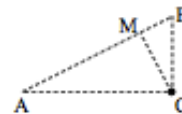


Напряжённость электрического поля

ЗАДАЧА 1. («Росатом», 2011, 11) Точечный заряд, расположенный в точке C , создаёт в точках A и B поле с напряжённостью E_A и E_B соответственно (см. рисунок; угол ACB — прямой). Найти напряжённость электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке M , являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB .



$$E_M = E_A + E_B$$

ЗАДАЧА 2. (Савченко, 6.1.17) Чему равна напряжённость электрического поля в центре равномерно заряженного тонкого кольца радиуса R ? Чему она равна на оси кольца на расстоянии h от центра? Заряд кольца Q .

$$\frac{Q/\varepsilon(\varepsilon^2 + h^2)}{4\pi\varepsilon} = E$$

ЗАДАЧА 3. (Савченко, 6.1.18) Чему равна напряжённость электрического поля равномерно заряженной нити длины l на прямой, которая является продолжением нити, на расстоянии a от ближайшего её конца? Линейная плотность заряда нити равна ρ .

$$\frac{(\rho + l)\rho}{l^2\varepsilon} = E$$

ЗАДАЧА 4. (МОШ, 2008, 10) В вершинах правильного N -угольника расположены последовательно электрические заряды, величины которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 и равны $q, 2q, \dots, 2^{N-1}q$. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно R . Найдите величину E напряжённости электрического поля в центре многоугольника.

$$\frac{\varepsilon R}{b^2} \frac{N \cos \frac{\pi}{N}}{1 - 2^N} = E$$

ЗАДАЧА 5. (МОШ, 2008, 11) В вершинах правильного N -угольника расположены последовательно электрические заряды, величины которых образуют арифметическую прогрессию с разностью q и равны $q, 2q, \dots, Nq$. Расстояние от центра многоугольника до любой из его вершин равно R . Найдите величину напряжённости E электрического поля в центре многоугольника.

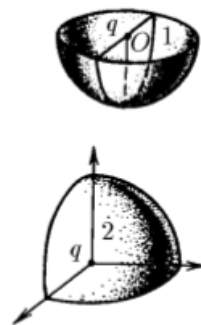
$$\frac{\varepsilon R}{b^2} \frac{N}{N} \frac{Nq}{N} = E$$

ЗАДАЧА 6. (Савченко, 6.1.21; МОШ, 2009, 10) Тонкое проволочное кольцо разорвалось, когда нанесённый на него заряд превысил q . Какой заряд можно нанести на второе кольцо, радиус которого в n раз больше, а прочность проволоки на разрыв в k раз выше, чем у проволоки первого кольца, чтобы второе кольцо не разорвалось?

$$q \wedge n^2 \geq k$$

ЗАДАЧА 7. (Савченко, 6.5.8) а) В центр равномерно заряженной полусферы, поверхностная плотность заряда которой σ , поместили заряд q . С какой силой этот заряд действует на полусферу? на половину полусферы (1)? на четвертую её часть (2)? Определите напряжённость электрического поля от этих частей сфер в её центре.

б) Определите напряжённость электрического поля в центре равномерно заряженного полушария радиуса R с объёмной плотностью заряда ρ .



$$\frac{0\text{зр}}{4\pi} = \mathcal{E} \quad (6) \quad \frac{0\text{зр}1}{\sqrt{3}} = \mathcal{E}_2, \quad \frac{0\text{зр}2}{\sqrt{2}} = \mathcal{E}_1, \quad \frac{0\text{зр}4}{\sigma} = \mathcal{E}_0, \quad \text{а) } \mathcal{E}_0$$

Телесный угол

Для начала обсудим хорошо известные вам вещи. Рассмотрим окружность радиуса R с центром O и дугу AB этой окружности. Как мы знаем, *плоский угол* AOB — это часть плоскости, которая служит объединением всех лучей с началом O , пересекающих дугу AB . Величина α этого угла (в радианах) есть отношение длины l дуги AB к радиусу окружности:

$$\alpha = \frac{l}{R}. \quad (1)$$

Ясно, что это определение корректно: оно не зависит от величины радиуса окружности. В самом деле, если радиус окружности с центром O изменится в k раз, то длина l дуги, вырезанной на окружности данным плоским углом, также изменится в k раз, и отношение $\alpha = l/R$ останется прежним. Иными словами, величина α , определяемая с помощью окружности, является характеристикой самого угла и от окружности не зависит. Если имеется один лишь плоский угол, а никакой окружности изначально нет, то для нахождения α мы можем взять любую окружность с центром в вершине угла и воспользоваться формулой (1).

Теперь перенесём эти рассуждения на пространственный случай. Рассмотрим сферу радиуса R с центром O . Выберем на ней область D , ограниченную замкнутым контуром γ , и возьмём объединение всех лучей с началом O , пересекающих область D . В результате получим *телесный угол* $O\gamma$, величина которого (в *стерадианах*) определяется как

$$\Omega = \frac{S}{R^2}, \quad (2)$$

где S — площадь области D .

Таким образом, телесный угол $O\gamma$ — это часть пространства, ограниченная конической поверхностью, заметаемой лучом OM , когда точка M пробегает контур γ . При этом контур γ на самом деле не обязан лежать на какой-либо сфере (например, он может быть треугольником или квадратом — такие ситуации как раз и возникнут ниже в задачах). Телесный угол обладает «собственной геометрией»; как и плоский угол, он является «самостоятельной» геометрической фигурой; однако для нахождения его величины по формуле (2) понадобится вспомогательная сфера с центром O .

ЗАДАЧА 8. Объясните, почему определение (2) корректно (иными словами, почему величина Ω данного телесного угла не зависит от выбора вспомогательной сферы).

ЗАДАЧА 9. Полный плоский угол равен 2π радиан. А сколько стерадиан составляет полный телесный угол?

ЗАДАЧА 10. Точка P не лежит в плоскости α . Под каким телесным углом видна плоскость α из точки P ?

ЗАДАЧА 11. Снова рассмотрим плоскость α . Пусть $A \in \alpha$, $P \notin \alpha$ и прямая PA образует острый угол θ с нормалью к плоскости α . Пусть R — длина отрезка PA . Окружим точку A малым контуром γ , лежащим в плоскости α (длина этого контура много меньше R) — получим малый телесный угол $P\gamma$. Объясните, почему величина этого телесного угла даётся формулой

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2} \cos \theta,$$

где dS — площадь части плоскости, ограниченной контуром γ .

ЗАДАЧА 12. (Савченко, 6.1.19) Докажите, что составляющая напряжённости электрического поля, перпендикулярная поверхности равномерно заряженного участка плоскости, равна

$$E_{\perp} = \frac{\sigma \Omega}{4\pi\epsilon_0},$$

где Ω — телесный угол, под которым виден этот участок из рассматриваемой точки пространства, σ — поверхностная плотность заряда. Определите, пользуясь этим, напряжённость электрического поля:

а) в центре куба, пять граней которого равномерно заряжены с поверхностной плотностью заряда σ , а одна грань не заряжена;

б) в центре правильного тетраэдра, три грани которого заряжены с поверхностной плотностью σ_1 , а четвёртая — с поверхностной плотностью заряда σ_2 ;

в) равномерно заряженной плоскости, если поверхностная плотность заряда σ ;

г) на оси длинной трубы с сечением в виде правильного треугольника, если поверхностная плотность заряда граней треугольника трубы равна соответственно σ_1 , σ_2 , σ_3 ;

д) в вершине конуса с углом при вершине α и высоты h , равномерно заряженного с объёмной плотностью заряда ρ ;

е) на ребре длинного бруска, равномерно заряженного с объёмной плотностью заряда ρ ; поперечное сечение бруска — правильный треугольник со стороной a .

См. конспект

ЗАДАЧА 13. (МОШ, 2009, 11) Три прилегающие друг к другу грани кубика заряжены равномерно с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$, а остальные грани — с плотностью заряда $-\sigma$. Найти напряжённость \vec{E} электрического поля в центре кубика.

$$\frac{E \wedge \sigma}{\sigma} = \vec{E}$$

Ответ к задаче 12

а) $E = \frac{\sigma}{6\varepsilon_0}$;

б) $E = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{4\varepsilon_0}$;

в) $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$;

г) $E = \frac{1}{3\varepsilon_0} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3}$;

д) $E = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} (1 - \cos \alpha)$;

е) $E = \frac{\rho a \sqrt{3}}{12\varepsilon_0}$.