Статика

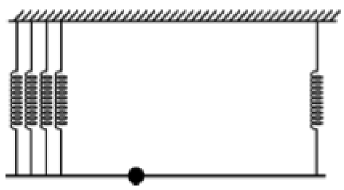
Задача 1. (*«Росатом», 2013, 7–9*) Имеются рычажные весы с чашами различной массы, набор одинаковых кубиков и набор одинаковых шариков. Весы находятся в равновесии, если положить: на левую чашу 2 кубика, а на правую 3 шарика; или на левую чашу 1 шарик, а на правую 1 кубик. Какая чаша весов перевесит, если положить на левую чашу 1 кубик, а на правую 1 шарик? Ответ обоснуйте.

Левая перевесит

Задача 2. (*«Росатом», 2015, 8–9*) Два груза с массами m_1 и m_2 уравновешены на неравноплечих весах ($m_1 < m_2$). Грузы меняют местами, добавляя к грузу m_2 точно такой же груз, и равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз следует добавить к грузу m_1, чтобы равновесие весов восстановилось?

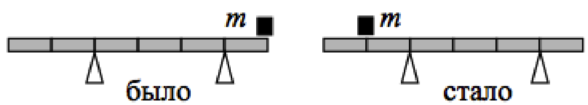
$m_x = \frac{2m_2^2 - m_1^2}{m_1}$

Задача 3. (*Всеросс., 2015, I этап, 8–9*) Лёгкая прямая рейка длиной 100 см с прикреплённым к ней грузом массой 1 кг подвешена за концы: правый конец — на одной вертикальной пружине, левый — на четырёх таких же пружинах (эти четыре пружины тонкие, и поэтому можно считать, что они прикреплены к одной точке). Рейка горизонтальна, все пружины растянуты на одинаковую длину. На каком расстоянии от левого конца рейки находится груз?



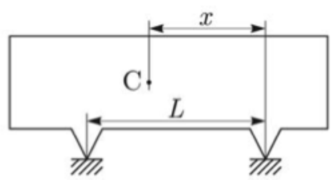
20 см

Задача 4. (*Всеросс., 2017, I этап, 9*) Небольшой грузик, покоящийся на достаточно тяжёлой однородной доске, имеющей две опоры, перенесли справа налево (так, как показано на рисунке). При этом модуль силы реакции одной из опор увеличился на $\Delta N = 14$ Н. Определите массу m грузика. Модуль ускорения свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.



$m = \frac{3\Delta N}{5g} = 840$ г

Задача 5. (*Всеросс., 2014, I этап, 9*) Расстояние между двумя опорами балки (см. рисунок) равно $L = 2{,}8$ м, а расстояние между правой опорой и центром масс (к центру масс, в точке C, приложена сила тяжести) равно $x = 2{,}1$ м. Для того чтобы определить массу балки, под правую опору подставили весы. Их показания составили $M = 2400$ кг. Определите массу балки m.



$m = 9600$ кг

Задача 6. (*Всеросс., 2016, I этап, 9–10*) К концам лёгкого рычага, находящегося в равновесии, подвешены грузы: к левому концу подвешено два груза, а к правому три (см. рисунок). Затем к левому и правому концам рычага подвесили ещё по одному грузу, а точку подвеса рычага переместили на 1 см, после чего рычаг вновь оказался в равновесии. Какова длина рычага? Все грузы одинаковые.

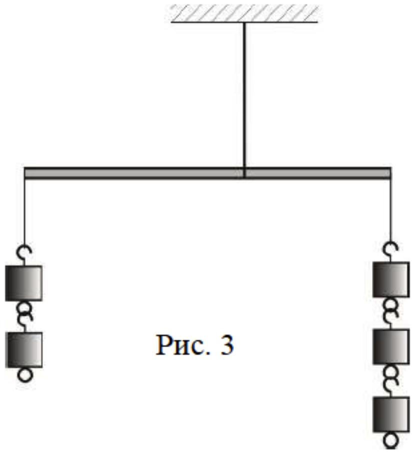
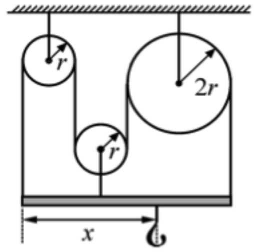


Рис. 3

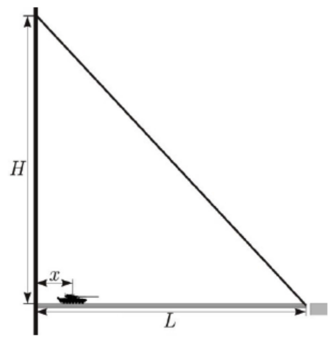
$l = 35$ см

Задача 7. (*Всеросс., 2015, II этап, 8–10*) В системе, изображённой на рисунке, блоки, нить и стержень невесомы. Правый блок в два раза больше по размеру, чем другие два. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. На крючок повесили груз некоторой массы, при этом система осталась неподвижна. Определите, чему равно отношение x/r.



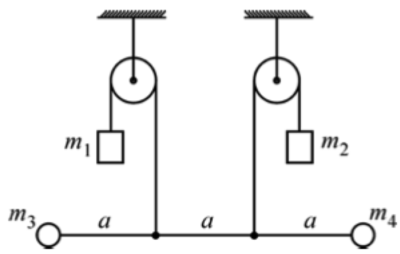
3,5

Задача 8. (*Всеросс., 2016, II этап, 9*) Танк массой $m = 50$ т выезжает по откидному мосту из замка (см. рисунок). Мост представляет собой однородную балку длиной $L = 60$ м и массой $M = 60$ т. Правый конец моста удерживается в горизонтальном положении двумя наклонными тросами так, как показано на рисунке. Расстояние от моста до верхней точки крепления тросов $H = 80$ м. Постройте график зависимости модуля силы натяжения T одного троса от положения x танка на мосту.



См. конец листка

Задача 9. (*МФО, 2013, 9*) На рисунке изображён легкий горизонтальный жёсткий стержень длиной $3a$, к которому на расстояниях a и $2a$ от одного из концов прикреплены вертикальные нити, перекинутые через блоки. К противоположным концам нитей прикреплены грузы массами m_1 и m_2. К концам стержня прикреплены грузы массами m_3 и m_4. Известно, что $m_1 = 1$ кг и $m_3 = 2$ кг. Какими должны быть массы m_2 и m_4, чтобы система находилась в равновесии?



$m_2 = 3m_3 - 2m_1 = 4$ кг; $m_4 = 2m_3 - m_1 = 3$ кг

Задача 10. (*Всеросс., 2014, II этап, 8–9*) Школьник Станислав проводит опыт с однородным цилиндром массой $M = 1$ кг и длиной $L = 1$ м. Прикрепив при помощи тонких лёгких нитей к одному концу цилиндра гирю массой $M = 1$ кг, а к другому — груз массой $3M = 3$ кг, Станислав уравновесил цилиндр на пальце. На каком расстоянии от гири должен находиться палец?

70 см

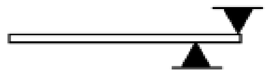
Задача 11. (*МФО, 2014, 8–9*) Однородная доска массой 3 кг и длиной 2 м опирается левым концом на одну пружину, а правым концом — на две такие же пружины. Школьница Ирина хочет разместить на доске маленький груз массой m таким образом, чтобы доска была горизонтальна.

А) На каком расстоянии от левого конца доски Ирина должна разместить груз массой $m = 6$ кг? Ответ представьте в сантиметрах и округлите до целых.

В) При каком минимальном m Ирина сможет добиться горизонтальности доски? Ответ представьте в килограммах и округлите до десятых.

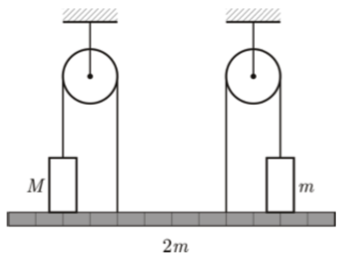
А) 150; В) 1,5

Задача 12. (*«Росатом», 2012, 11*) Стержень массой m и длиной l удерживают в горизонтальном положении с помощью двух точечных опор, расположенных на расстоянии $l/5$ друг от друга. Найти силы реакции опор, считая, что на одну из них стержень опирается самым краем.



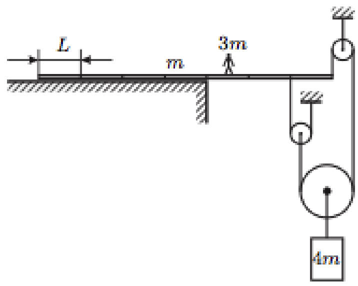
$N_1 = \frac{5}{2}mg$, $N_2 = \frac{3}{2}mg$

Задача 13. (*Всеросс., 2015, регион, 9*) В системе (см. рисунок) найдите величины сил, с которыми грузы действуют на однородную планку. При каких значениях массы M возможно равновесие грузов на планке? Нити и блоки невесомы. Трения нет. Масса m известна.



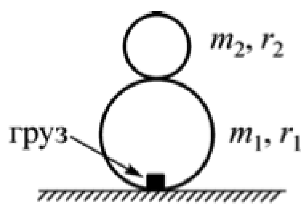
$N_1 = \frac{5}{12}(M-m)g$, $N_2 = \frac{1}{12}(M-m)g$; равновесие возможно при $m \leqslant M < 13m$

Задача 14. (*Всеросс., 2014, регион, 9*) Доска массой m лежит, выступая на $3/7$ своей длины, на краю обрыва. Длина одной седьмой части доски $L = 1$ м. К свисающему краю доски с помощью невесомых блоков и нитей (см. рисунок) прикреплён противовес, имеющий массу $4m$. На каком расстоянии от края обрыва на доске может стоять человек массой $3m$, чтобы доска оставалась горизонтальной?



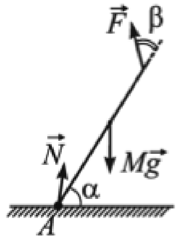
Не более 2,5 м влево и не более 1,5 м вправо от края обрыва

Задача 15. (*МФО, 2012, 9*) Детская игрушка «неваляшка» состоит из двух пластмассовых шаров радиусами $r_1 = 9$ см и $r_2 = 6$ см (см. рисунок), полых внутри. Игрушка стоит на горизонтальном столе. В нижней точке нижнего шара закреплён маленький груз массой $M = 250$ г. «Неваляшка» обладает следующим свойством: если её положить набок так, чтобы оба шара касались стола, и отпустить, то она «встанет» и вновь примет вертикальное положение. При каких массах m_1 и m_2 нижнего и верхнего шаров соответственно игрушка обладает этим свойством? Считать, что центры масс шаров совпадают с их геометрическими центрами.



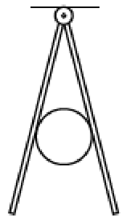
$m_2 < \frac{Mr_1}{r_1+r_2} = 150$ г, m_1 — любая

Задача 16. (*Всеросс., 2015, I этап, 10*) Однородная прямая металлическая балка массой $M = 100$ кг и длиной $L = 3$ м установлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Нижний конец балки упирается в землю. Какую минимальную силу F нужно прикладывать к балке, чтобы удерживать её в таком положении? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



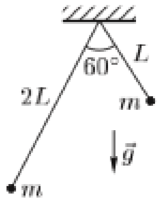
$\boxed{F = \frac{1}{2}Mg\cos\alpha = 250 \text{ Н}}$

Задача 17. (*«Росатом», 2016, 10*) Две пластинки массой M и длиной l прикреплены шарнирно по одной из своих сторон к потолку. Шар радиуса $R = l/6$ вставлен между пластинками так, что расстояние от точек касания шара и пластинок до шарнира равно $l/2$. Коэффициент трения между шаром и пластинками k. Какой должна быть масса шара, чтобы он находился в равновесии? При каком максимальном коэффициенте трения между шаром и пластинками пластинки не смогут удержать шар при любой его массе?



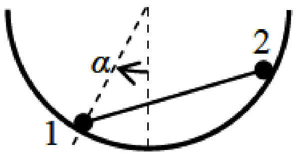
$\boxed{m \leqslant \frac{3k-1}{5}M;\ k = 1/3}$

Задача 18. (*Всеросс., 2010, регион, 10*) Определите модуль силы электростатического отталкивания двух маленьких заряженных шариков одинаковой массы m. Один из них висит на нити длины L, другой — на нити длины $2L$. Угол между нитями равен 60° (см. рисунок).



$\boxed{F = mg\sqrt{\frac{3}{7}}}$

Задача 19. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) «Гантель» из лёгкого жёсткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую полусферическую «ямку». Длина стержня в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса ямки. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если радиус, проведённый к первому шарику, составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с вертикалью. Найти отношение масс шариков.

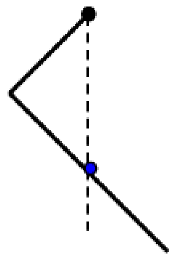


$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{3}}$

Задача 20. (*МФО, 2012, 10*) Гладкая полусферическая чаша неподвижно закреплена на столе так, что её ось симметрии вертикальна. В чашу последовательно кладут два тонких неоднородных стержня одинаковой массы и одинаковой длины, меньшей диаметра чаши. Первый стержень в положении равновесия образует с горизонтом угол α_1, а второй — угол $\alpha_2 < \alpha_1$. Затем стержни скрепляют друг с другом боковыми поверхностями так, что они образуют новый тонкий стержень прежней длины, и кладут получившийся составной стержень обратно в чашу. Какой угол с горизонтом будет образовывать в положении равновесия этот составной стержень?

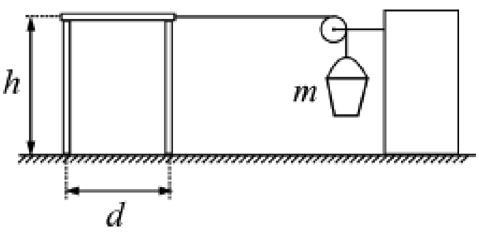
$\boxed{\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}(\mathrm{tg}\,\alpha_1 \pm \mathrm{tg}\,\alpha_2)\right)}$

Задача 21. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2014, 10–11*) «Уголок» массой $m = 60$ г, изготовленный из однородной проволоки, имеет два перпендикулярных «плеча» с длинами $l_1 = a = 20$ см и $l_2 = 2a$. Он повешен за конец короткого плеча на шарнирном подвесе (который позволяет ему свободно вращаться в вертикальной плоскости) и опирается серединой длинного плеча на гладкий горизонтальный гвоздь, расположенный на одной вертикали с подвесом (см. рисунок). Найти величину силы, с которой уголок действует на подвес. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



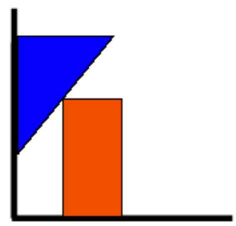
$F = \frac{\sqrt{170}}{12} mg \approx 0{,}65$ Н

Задача 22. (*МФО, 2016, 10*) На горизонтальном полу стоит табуретка массой $M = 4{,}5$ кг. Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между её ножками $d = 30$ см. Коэффициент трения между ножками и полом $\mu = 0{,}4$. Экспериментатор Глюк привязал к середине стороны сиденья табуретки невесомую нерастяжимую нить, перекинутую через блок (см. рисунок). На втором конце нити висит ведёрко с водой. Масса ведёрка вместе с водой равна $m = 0{,}6$ кг. Экспериментатор Глюк опустил в ведёрко тонкую трубку с внутренним диаметром $D = 4$ мм, по которой в ведёрко стала доливаться вода с постоянной скоростью $v = 0{,}2$ м/с. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2. Через какое время после этого табуретка придёт в движение? Как начнёт двигаться табуретка: скользить, двигаясь поступательно, или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси?



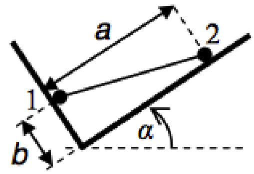
Начнёт опрокидываться через $\tau = \frac{4}{\rho v \pi D^2}\left(\frac{Md}{2h} - m\right) \approx 358$ с

Задача 23. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2015, 10–11*) Клин с углом α при вершине может скользить без трения по вертикальным направляющим и опирается на брусок, стоящий на горизонтальной поверхности. Масса бруска в $n = 2$ раза больше массы клина, высота бруска во столько же раз больше его ширины, коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 2/3$. При каких α брусок может покоиться?



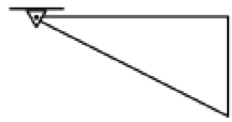
$\alpha > \operatorname{arctg} \frac{2n}{n+2} = 45°$

Задача 24. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2016, 10–11*) «Гантель» из лёгкого жёсткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую яму в виде прямого двугранного угла, одна из плоскостей которого составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если отношение расстояний от шариков до вершины угла $a/b = 3$. Найти отношение масс шариков.



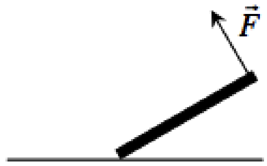
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Задача 25. (*«Росатом», 2012, 11*) Вырезанный из листа фанеры прямоугольный треугольник массой m подвешен за одну вершину и удерживается так, что один из его катетов параллелен поверхности земли. Какую минимальную силу нужно приложить для этого к треугольнику? Горизонтальный катет вдвое длиннее вертикального.



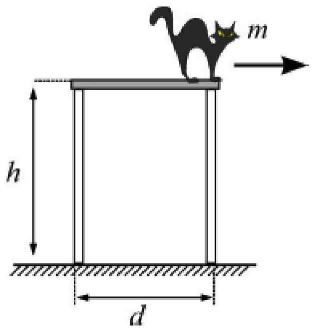
$F = \frac{4mg}{3\sqrt{5}}$

Задача 26. (*«Росатом», 2012, 11*) Человек медленно поднимает за один конец лежащий на полу стержень, прикладывая к нему силу, перпендикулярную стержню (см. рисунок). При каком минимальном коэффициенте трения между стержнем и полом человек сможет поставить стержень вертикально?



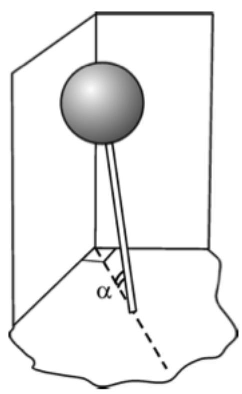
$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Задача 27. (*МФО, 2016, 11*) На краю табуретки массой $M = 4{,}5$ кг сидит кошка массой $m = 1{,}5$ кг. Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между ножками $d = 30$ см (см. рисунок). Коэффициент трения между ножками и полом равен $\mu = 0{,}5$. Кошка прыгает с табуретки в направлении, показанном стрелкой. При этом ускорение центра масс кошки направлено горизонтально. При каком максимальном значении модуля этого ускорения табуретка будет оставаться неподвижной? Если модуль ускорения превысит это значение на очень малую величину, то как начнёт двигаться табуретка: скользить по полу или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси? Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.



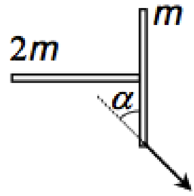
$a_{\max} = \frac{gd}{h}\left(1 + \frac{M}{2m}\right) \approx 16{,}7$ м/с^2; опрокидываться

Задача 28. (*МФО, 2012, 11*) «Чупа-чупс стоял в углу. . . » За что его поставили, неясно, но стоять ему не очень-то хотелось. Вот он и стал постепенно отставлять свою «ножку» всё дальше вдоль биссектрисы того прямого угла между стенками, в который его поставили, а «головой» опираясь о стенки (см. рисунок). При каком угле α между ножкой и полом чупа-чупс упадёт? Считать, что вся его масса сосредоточена в однородной шарообразной «голове» радиусом R, расстояние от центра головы до конца ножки равно l, коэффициент трения головы о стенки угла — μ_1, а ножки об пол — μ_2. Решите задачу в общем виде, а затем проведите численный расчёт угла α для случая $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}6$, $l = 4R$.



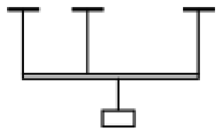
$\alpha = \arccos\frac{R\mu_1\mu_2}{l\sqrt{1+\mu_2^2}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}} \approx 54{,}6°$

Задача 29. (*«Росатом», 2011 и 2013, 11*) Две тонкие палочки одинаковой длины с массами m и $2m$ образуют букву «Т» (палочка с массой $2m$ прикреплена к середине палочки с массой m под прямым углом к ней). Палочки лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (см. рисунок, вид сверху). К одному из концов палочки m привязана нить, за которую систему палочек медленно тянут по поверхности. Какой угол α составляет палочка m с нитью?



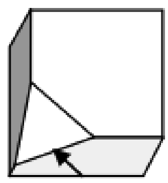
$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}}$

Задача 30. (*«Росатом», 2012, 11*) Невесомый недеформируемый стержень длиной l подвешен на трёх одинаковых вертикальных нитях, привязанных к концам и точке, лежащей на расстоянии $l/3$ от его левого конца (см. рисунок). На каком максимальном расстоянии справа от точки крепления средней нити можно подвесить массивное тело так, чтобы все нити были натянутыми? Считать, что нити упругие, но слабо растяжимые.



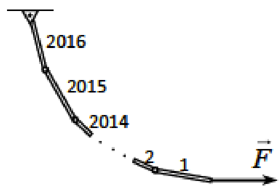
$\boxed{x < \frac{l}{2}}$

Задача 31. (*«Росатом», 2015, 11*) Из листа фанеры вырезали равносторонний треугольник массой m и поставили его в угол между тремя взаимно перпендикулярными поверхностями так, что треугольник касается своими сторонами всех трёх граней угла (см. рисунок). Какой минимальной горизонтальной силой нужно действовать на середину нижней стороны треугольника, чтобы он покоился?



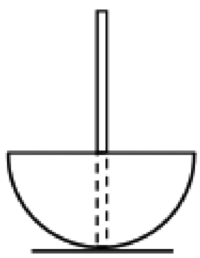
$\boxed{F = \frac{mg}{3\sqrt{2}}}$

Задача 32. (*«Росатом», 2016, 11*) 2016 одинаковых стержней массой m каждый соединены шарнирно и подвешены за 2016-ый стержень к потолку. На нижний конец нижнего стержня действует горизонтальная сила F. Найти угол между 2016-м стержнем и вертикалью в равновесии.



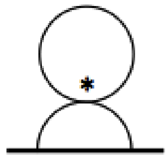
$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2F}{4031mg}}$

Задача 33. (*«Росатом», 2013, 11*) Тонкостенная полусфера имеет радиус R. К нижней точке внутренней поверхности полусферы припаян очень тонкий стержень, перпендикулярный поверхности полусферы в точке крепления (см. рисунок). Масса стержня в три раза превосходит массу полусферы. При какой длине стержня нарисованное положение тела будет положением устойчивого равновесия? Ответ обосновать.



$\boxed{l < \frac{7}{3}R}$

Задача 34. (*«Росатом», 2015, 11*) На вершину закреплённой полусферы радиуса R ставят шар того же радиуса со смещённым центром тяжести («ванька-встанька»). Центр тяжести шара находится ниже его центра на расстоянии $2R/3$ от центра (см. рисунок; центр тяжести шара показан звездочкой). Будет ли такое положение шара устойчивым? Проскальзывания нет.



Да

Ответ к задаче 8