Статика

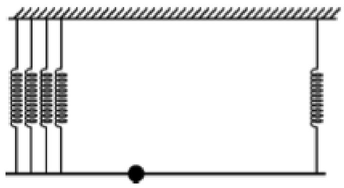
Задача 1. (*«Росатом», 2013, 7–9*) Имеются рычажные весы с чашами различной массы, набор одинаковых кубиков и набор одинаковых шариков. Весы находятся в равновесии, если положить: на левую чашу 2 кубика, а на правую 3 шарика; или на левую чашу 1 шарик, а на правую 1 кубик. Какая чаша весов перевесит, если положить на левую чашу 1 кубик, а на правую 1 шарик? Ответ обоснуйте.

Левая перевесит

Задача 2. (*«Росатом», 2015, 8–9*) Два груза с массами m_1 и m_2 уравновешены на неравноплечих весах ($m_1 < m_2$). Грузы меняют местами, добавляя к грузу m_2 точно такой же груз, и равновесие весов нарушается. Какой дополнительный груз следует добавить к грузу m_1, чтобы равновесие весов восстановилось?

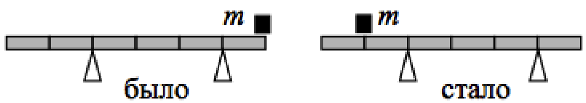
$m_x = \frac{2m_2^2 - m_1^2}{m_1}$

Задача 3. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 8–9*) Лёгкая прямая рейка длиной 100 см с прикреплённым к ней грузом массой 1 кг подвешена за концы: правый конец — на одной вертикальной пружине, левый — на четырёх таких же пружинах (эти четыре пружины тонкие, и поэтому можно считать, что они прикреплены к одной точке). Рейка горизонтальна, все пружины растянуты на одинаковую длину. На каком расстоянии от левого конца рейки находится груз?



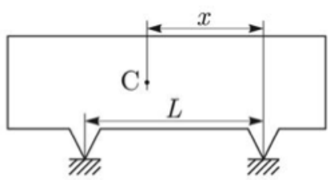
20 см

Задача 4. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 9*) Небольшой грузик, покоящийся на достаточно тяжёлой однородной доске, имеющей две опоры, перенесли справа налево (так, как показано на рисунке). При этом модуль силы реакции одной из опор увеличился на $\Delta N = 14$ Н. Определите массу m грузика. Модуль ускорения свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.



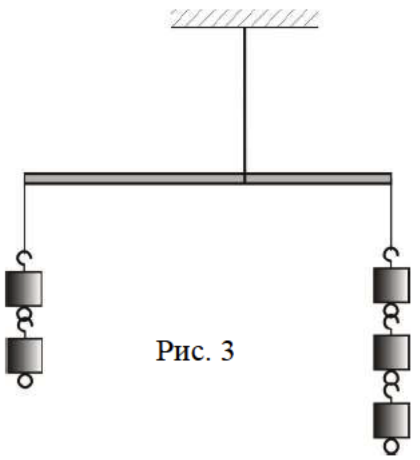
$m = \frac{3\Delta N}{5g} = 840$ г

Задача 5. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 9*) Расстояние между двумя опорами балки (см. рисунок) равно $L = 2{,}8$ м, а расстояние между правой опорой и центром масс (к центру масс, в точке C, приложена сила тяжести) равно $x = 2{,}1$ м. Для того чтобы определить массу балки, под правую опору подставили весы. Их показания составили $M = 2400$ кг. Определите массу балки m.



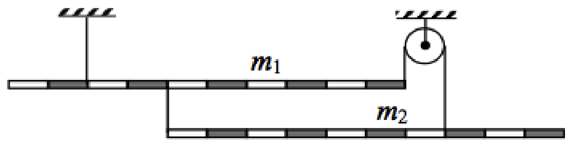
$m = 9600$ кг

Задача 6. (*Всеросс., 2016, ШЭ, 9–10*) К концам лёгкого рычага, находящегося в равновесии, подвешены грузы: к левому концу подвешено два груза, а к правому три (см. рисунок). Затем к левому и правому концам рычага подвесили ещё по одному грузу, а точку подвеса рычага переместили на 1 см, после чего рычаг вновь оказался в равновесии. Какова длина рычага? Все грузы одинаковые.



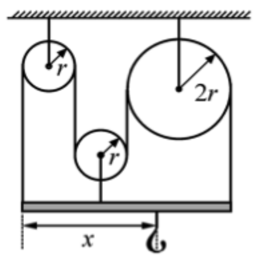
$l = 35$ см

Задача 7. (*Всеросс., 2018, ШЭ, 9*) Система, состоящая из двух однородных стержней разной плотности, находится в равновесии. Масса верхнего стержня $m_1 = 3{,}6$ кг. Трение пренебрежимо мало. Определите, при какой массе m_2 нижнего стержня возможно такое равновесие.



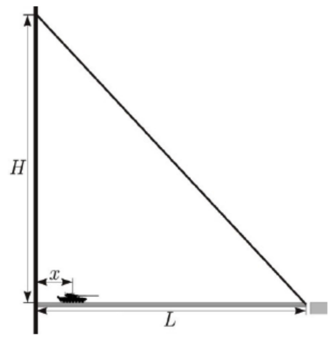
$m_2 = \frac{7}{12}m_1 = 2{,}1$ кг

Задача 8. (*Всеросс., 2015, МЭ, 8–10*) В системе, изображённой на рисунке, блоки, нить и стержень невесомы. Правый блок в два раза больше по размеру, чем другие два. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. На крючок повесили груз некоторой массы, при этом система осталась неподвижна. Определите, чему равно отношение x/r.



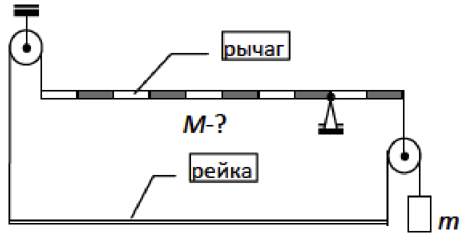
3,5

Задача 9. (*Всеросс., 2016, МЭ, 9*) Танк массой $m = 50$ т выезжает по откидному мосту из замка (см. рисунок). Мост представляет собой однородную балку длиной $L = 60$ м и массой $M = 60$ т. Правый конец моста удерживается в горизонтальном положении двумя наклонными тросами так, как показано на рисунке. Расстояние от моста до верхней точки крепления тросов $H = 80$ м. Постройте график зависимости модуля силы натяжения T одного троса от положения x танка на мосту.



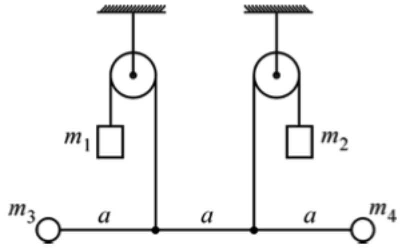
См. конец листка.

Задача 10. (*Всеросс., 2017, МЭ, 9*) Система состоит из однородного рычага, однородной рейки и груза массой $m = 0{,}6$ кг, соединённых лёгкими нитями, переброшенными через невесомые блоки. При какой массе M рычага возможно равновесие системы? Трения в системе нет. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны.



$M = 4m = 2{,}4$ кг

Задача 11. (*МОШ, 2013, 9*) На рисунке изображён легкий горизонтальный жёсткий стержень длиной $3a$, к которому на расстояниях a и $2a$ от одного из концов прикреплены вертикальные нити, перекинутые через блоки. К противоположным концам нитей прикреплены грузы массами m_1 и m_2. К концам стержня прикреплены грузы массами m_3 и m_4. Известно, что $m_1 = 1$ кг и $m_3 = 2$ кг. Какими должны быть массы m_2 и m_4, чтобы система находилась в равновесии?



$m_2 = 3m_3 - 2m_1 = 4$ кг; $m_4 = 2m_3 - m_1 = 3$ кг

Задача 12. (*Всеросс., 2014, МЭ, 8–9*) Школьник Станислав проводит опыт с однородным цилиндром массой $M = 1$ кг и длиной $L = 1$ м. Прикрепив при помощи тонких лёгких нитей к одному концу цилиндра гирю массой $M = 1$ кг, а к другому — груз массой $3M = 3$ кг, Станислав уравновесил цилиндр на пальце. На каком расстоянии от гири должен находиться палец?

70 см

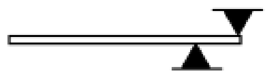
Задача 13. (*МОШ, 2014, 8–9*) Однородная доска массой 3 кг и длиной 2 м опирается левым концом на одну пружину, а правым концом — на две такие же пружины. Школьница Ирина хочет разместить на доске маленький груз массой m таким образом, чтобы доска была горизонтальна.

А) На каком расстоянии от левого конца доски Ирина должна разместить груз массой $m = 6$ кг? Ответ представьте в сантиметрах и округлите до целых.

В) При каком минимальном m Ирина сможет добиться горизонтальности доски? Ответ представьте в килограммах и округлите до десятых.

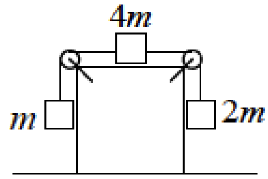
А) 150; В) 1,5

Задача 14. (*«Росатом», 2012, 11*) Стержень массой m и длиной l удерживают в горизонтальном положении с помощью двух точечных опор, расположенных на расстоянии $l/5$ друг от друга. Найти силы реакции опор, считая, что на одну из них стержень опирается самым краем.



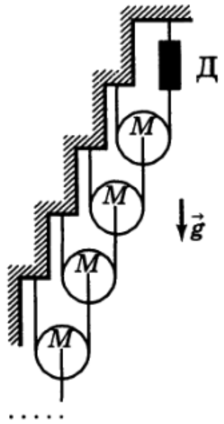
$N_1 = \frac{5}{2}mg$, $N_2 = \frac{3}{2}mg$

Задача 15. (*«Росатом», 2017, 9–10*) На горизонтальной опоре находится куб, на котором укреплены два блока. Через блоки перекинута нить с грузами массами m, $4m$ и $2m$. Какой горизонтальной силой надо действовать на куб, чтобы он покоился? Трение между кубом и опорой отсутствует; коэффициент трения между верхним телом и кубом — k.



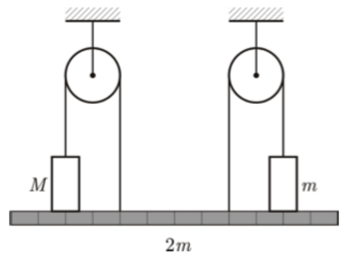
$$F = \begin{cases} \frac{4}{7}mg(1-4k), & \text{если } k \leqslant \frac{1}{4}; \\ 0, & \text{если } k > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Задача 16. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 9*) Из лёгких нитей и одинаковых блоков массой M каждый собрана полубесконечная система (рис.). Найдите силу F, которую показывает динамометр Д.



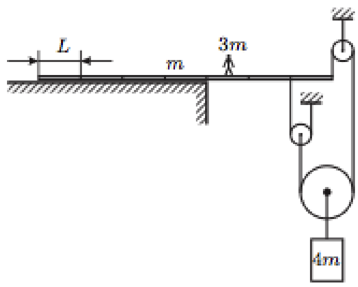
$F = Mg$

Задача 17. (*Всеросс., 2015, РЭ, 9*) В системе (см. рисунок) найдите величины сил, с которыми грузы действуют на однородную планку. При каких значениях массы M возможно равновесие грузов на планке? Нити и блоки невесомы. Трения нет. Масса m известна.



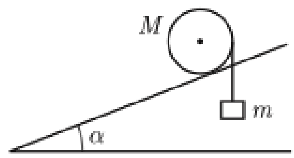
$N_1 = \frac{5}{12}(M - m)g$, $N_2 = \frac{1}{12}(M - m)g$; равновесие возможно при $m \leqslant M < 13m$

Задача 18. (*Всеросс., 2014, РЭ, 9*) Доска массой m лежит, выступая на $3/7$ своей длины, на краю обрыва. Длина одной седьмой части доски $L = 1$ м. К свисающему краю доски с помощью невесомых блоков и нитей (см. рисунок) прикреплён противовес, имеющий массу $4m$. На каком расстоянии от края обрыва на доске может стоять человек массой $3m$, чтобы доска оставалась горизонтальной?



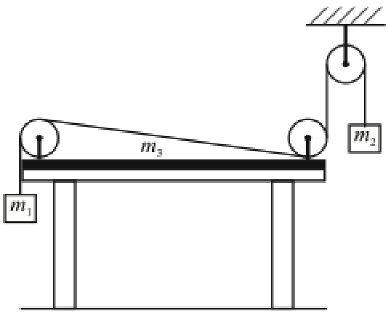
Не более 2,5 м влево и не более 1,5 м вправо от края обрыва

Задача 19. (*МОШ, 2006, 9*) Цилиндр массой M поместили на рельсы, наклонённые под углом α к горизонту (вид сбоку показан на рисунке). Груз какой минимальной массы m нужно прикрепить к намотанной на цилиндр нити, чтобы он покатился вверх? Проскальзывание отсутствует.



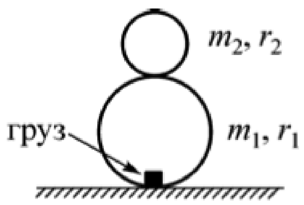
$m = M\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$

Задача 20. (*МОШ, 2006, 9*) В системе, изображённой на рисунке, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Массы грузов на концах нити равны m_1 и m_2, однородная доска массой m_3 лежит на горизонтальном столе так, что вертикальные участки нити, переброшенной через закреплённые на доске блоки, проходят вдоль её торцов. При каком условии доска при движении грузов будет оставаться в горизонтальном положении?



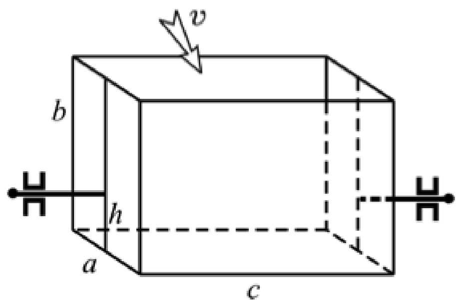
$\boxed{m_3 \geqslant \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}}$

Задача 21. (*МОШ, 2012, 9*) Детская игрушка «неваляшка» состоит из двух пластмассовых шаров радиусами $r_1 = 9$ см и $r_2 = 6$ см (см. рисунок), полых внутри. Игрушка стоит на горизонтальном столе. В нижней точке нижнего шара закреплён маленький груз массой $M = 250$ г. «Неваляшка» обладает следующим свойством: если её положить набок так, чтобы оба шара касались стола, и отпустить, то она «встанет» и вновь примет вертикальное положение. При каких массах m_1 и m_2 нижнего и верхнего шаров соответственно игрушка обладает этим свойством? Считать, что центры масс шаров совпадают с их геометрическими центрами.



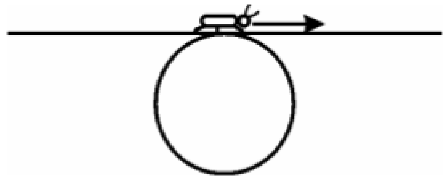
$\boxed{m_2 < \frac{Mr_1}{r_1+r_2} = 150 \text{ г}, m_1 \text{ — любая}}$

Задача 22. (*МОШ, 2010, 9*) Лёгкая тонкостенная чаша в виде прямоугольного параллелепипеда с длинами рёбер a, b и c свободно подвешена на горизонтальной оси так, что нижняя грань чаши с размерами $a \times c$ горизонтальна, а верхняя открыта (то есть отсутствует — см. рисунок). Ось проходит перпендикулярно граням параллелепипеда с размерами $a \times b$ в плоскости их симметрии на расстоянии $h < b/2$ от нижней грани $a \times c$. Чаша начинает наполняться водой со скоростью v м^3/с. Через какое время чаша опрокинется, повернувшись вокруг оси? Что с ней будет происходить в дальнейшем, если скорость наполнения не меняется?



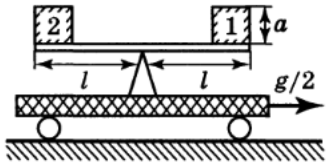
$\boxed{T = \frac{2ach}{v}\text{; колебания с периодом } T}$

Задача 23. (*МОШ, 2007, 9*) На неподвижно закреплённом цилиндре радиусом R лежит тонкая линейка длиной $l = 2\pi R$ и массой M. Линейка расположена горизонтально, перпендикулярно к оси цилиндра и опирается на него своей серединой. На середине линейки сидит жук массой $0{,}2M$, который начинает медленно ползти к одному из концов линейки, прочно цепляясь за её шероховатости; линейка при этом меняет угол своего наклона к горизонту, перекатываясь по цилиндру без проскальзывания. На каком расстоянии x_0 от середины линейки будет расположена точка соприкосновения линейки и цилиндра, когда жук доползет до конца линейки? Под каким углом α_0 к горизонту будет при этом наклонена линейка? При каких значениях коэффициента трения μ между цилиндром и линейкой возможно такое её перекатывание без проскальзывания?



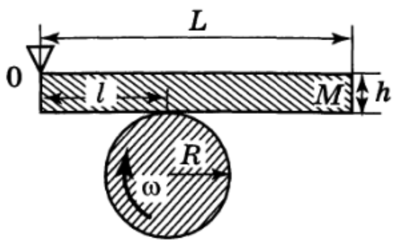
$x_0 = \frac{\pi R}{6}$; $\alpha_0 = 30^\circ$; $\mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$

Задача 24. (*Всеросс., 1996, финал, 9*) На тележке, движущейся по горизонтальной поверхности с ускорением $g/2$, установлены равноплечные весы, длина плеч которых равна l (рис.). На весах установлены два одинаковых по размеру, но изготовленных из разного материала однородных кубика. Длина ребра каждого кубика равна a. Найдите отношение плотности материала кубиков *1* и *2*, если известно, что весы при движении тележки находятся в равновесии, а кубики относительно весов неподвижны.



$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{4l-a}{4l-3a}$

Задача 25. (*Всеросс., 2000, финал, 9*) К диску радиуса R, насаженному на горизонтальный вал двигателя, под действием силы тяжести прижимается тяжёлый брусок массой M. Брусок может свободно поворачиваться относительно оси O (рис.). Длина бруска равна L, его толщина h. Точка соприкосновения бруска с диском находится на расстоянии l от левого края бруска. Коэффициент трения скольжения между бруском и диском равен μ. Предполагая, что двигатель развивает мощность P, определите угловую скорость ω вращения диска в зависимости от расстояния l. Рассмотрите случаи вращения диска по (ω^+) и против (ω^-) часовой стрелки. Постройте графики $\omega^+(l)$ и $\omega^-(l)$.

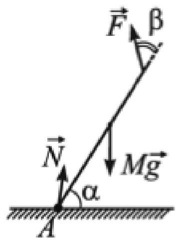


$\omega^+(l) = \frac{2P}{\mu MgRL}(l + \mu h)$ при всех l; $\omega^-(l) = \frac{2P}{\mu MgRL}(l - \mu h)$ при $l > \mu h$ (иначе заклинит)

Задача 26. (*Межреспубл., 1992, финал, 9*) Тяжёлая цепочка, состоящая из большого числа одинаковых гладких звеньев, свободно подвешена за концы (рис.). Масса всей цепочки $m = 0{,}2$ кг. Определите силы натяжения в нижней точке цепочки, а также в точке A, лежащей на половине глубины «провиса» цепочки.

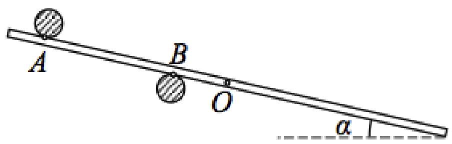
$T_0 = \frac{1}{2} mg \operatorname{ctg}\varphi \approx 0{,}3$ Н; $T_A = \frac{T_0}{\cos\varphi_A} \approx 0{,}65$ Н

Задача 27. (*Всеросс., 2015, ШЭ, 10*) Однородная прямая металлическая балка массой $M = 100$ кг и длиной $L = 3$ м установлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Нижний конец балки упирается в землю. Какую минимальную силу F нужно прикладывать к балке, чтобы удерживать её в таком положении? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



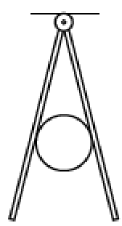
$F = \frac{1}{2} Mg\cos\alpha = 250$ Н

Задача 28. (*МОШ, 2018, 11*) Стержень лежит на двух горизонтальных валиках, касаясь их в точках A и B. Известны длина отрезка $AB = a$ и расстояние b между точкой A и центром тяжести прута O. Найдите коэффициент трения μ между валиком B и стержнем, если валик A гладкий, а прут образует с горизонтом угол α.



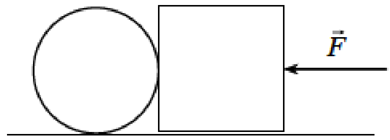
$\mu \geqslant \frac{a}{b} \operatorname{tg}\alpha$

Задача 29. (*«Росатом», 2016, 10*) Две пластинки массой M и длиной l прикреплены шарнирно по одной из своих сторон к потолку. Шар радиуса $R = l/6$ вставлен между пластинками так, что расстояние от точек касания шара и пластинок до шарнира равно $l/2$. Коэффициент трения между шаром и пластинками k. Какой должна быть масса шара, чтобы он находился в равновесии? При каком максимальном коэффициенте трения между шаром и пластинками пластинки не смогут удержать шар при любой его массе?



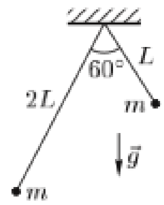
$m \leqslant \frac{3k-1}{5} M$; $k = 1/3$

Задача 30. (*«Росатом», 2017, 11*) На шероховатой горизонтальной поверхности находятся цилиндр массой m и куб массой $2m$. Диаметр основания цилиндра равен стороне куба. Какой минимальной горизонтальной силой, проходящей через центры тел, нужно действовать на куб, чтобы при движении тел цилиндр не вращался? Коэффициенты трения между кубом и поверхностью, цилиндром и поверхностью, а также между цилиндром и кубом одинаковы и равны μ.



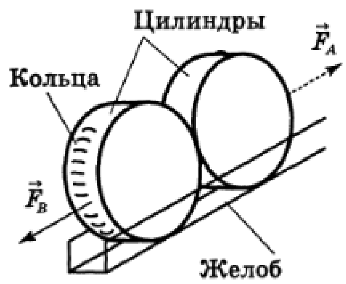
$\boxed{F = 3mg(1+\mu)}$

Задача 31. (*Всеросс., 2010, РЭ, 10*) Определите модуль силы электростатического отталкивания двух маленьких заряженных шариков одинаковой массы m. Один из них висит на нити длины L, другой — на нити длины $2L$. Угол между нитями равен 60° (см. рисунок).



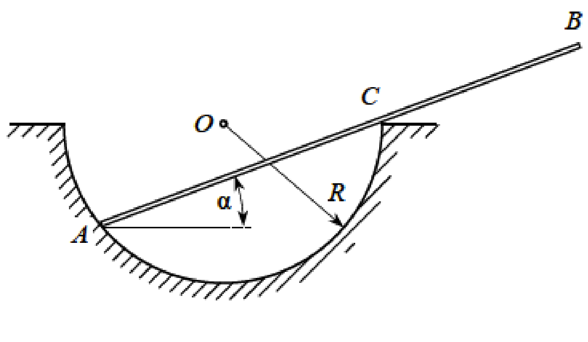
$\boxed{F = mg\sqrt{\frac{3}{7}}}$

Задача 32. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 10*) Система из двух жёстко соединённых цилиндров радиуса R и массой $m = 2$ кг каждый находится в горизонтальном желобе с гладкими стенками (рис.). Коэффициент трения правого цилиндра о поверхность $\mu_1 = 0{,}3$, а левого — $\mu_2 = 0{,}1$. Цилиндры можно тащить за нить, прикрепляемую к одному из колец на их внешней стороне. В какую сторону легче сдвинуть эту систему, прикладывая горизонтальную силу к нити, направленной вдоль линии, соединяющей центры цилиндров? Найдите минимальные горизонтальные силы F_A и F_B, необходимые для того, чтобы сдвинуть систему вправо и влево соответственно. Можно ли эту систему сдвинуть влево или вправо, потянув её за нить в горизонтальном направлении с силой $T = 0{,}7$ Н? Ответ обоснуйте.



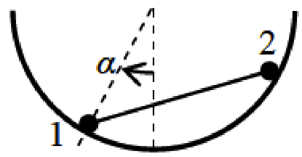
$\boxed{F_A = \frac{2(\mu_1+\mu_2)mg}{2-\mu_1+\mu_2} \approx 0{,}89 \text{ Н};\ F_B = \frac{2(\mu_1+\mu_2)mg}{2+\mu_1-\mu_2} \approx 0{,}72 \text{ Н};\ F_{\min} = \frac{(\mu_1+\mu_2)mg}{1+\mu_1-\mu_2} \approx 0{,}67 \text{ Н} \Rightarrow \text{можно}}$

Задача 33. (*МОШ, 2017, 10*) В горизонтальной плоской плите сделано углубление в виде полусферы радиусом R. В углубление опущен однородный тонкий стержень AB неизвестной длины l $(2R < l < 4R)$. Найдите длину стержня, если он образует с горизонтом угол α. Трения нигде нет.



$\boxed{l = 4R\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}}$

Задача 34. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2015, 10–11*) «Гантель» из лёгкого жёсткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую полусферическую «ямку». Длина стержня в $\sqrt{2}$ раз больше радиуса ямки. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если радиус, проведённый к первому шарику, составляет угол $\alpha = 30°$ с вертикалью. Найти отношение масс шариков.

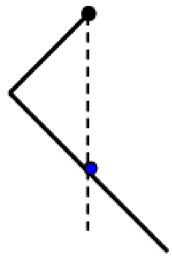


$\frac{m_1}{m_2} = \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{3}$

Задача 35. (*МОШ, 2012, 10*) Гладкая полусферическая чаша неподвижно закреплена на столе так, что её ось симметрии вертикальна. В чашу последовательно кладут два тонких неоднородных стержня одинаковой массы и одинаковой длины, меньшей диаметра чаши. Первый стержень в положении равновесия образует с горизонтом угол α_1, а второй — угол $\alpha_2 < \alpha_1$. Затем стержни скрепляют друг с другом боковыми поверхностями так, что они образуют новый тонкий стержень прежней длины, и кладут получившийся составной стержень обратно в чашу. Какой угол с горизонтом будет образовывать в положении равновесия этот составной стержень?

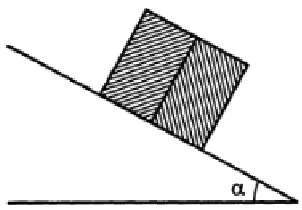
$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha_1 \pm \operatorname{tg}\alpha_2)\right)$

Задача 36. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2014, 10–11*) «Уголок» массой $m = 60$ г, изготовленный из однородной проволоки, имеет два перпендикулярных «плеча» с длинами $l_1 = a = 20$ см и $l_2 = 2a$. Он повешен за конец короткого плеча на шарнирном подвесе (который позволяет ему свободно вращаться в вертикальной плоскости) и опирается серединой длинного плеча на гладкий горизонтальный гвоздь, расположенный на одной вертикали с подвесом (см. рисунок). Найти величину силы, с которой уголок действует на подвес. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.



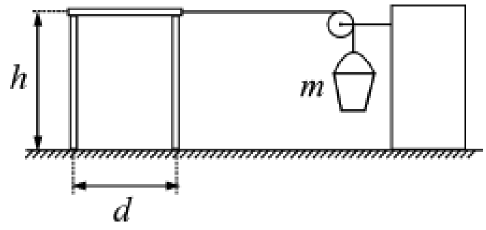
$F = \frac{\sqrt{170}}{12}mg \approx 0{,}65$ Н

Задача 37. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 10*) Куб, склеенный из двух одинаковых по объёму частей, кладут на наклонную плоскость таким образом, что плоскость склейки, параллельная одной из граней куба, перпендикулярна наклонной плоскости (рис.). Начнёт ли двигаться куб? Если да, то каким будет его движение в начальный момент? Отношение плотности материалов, из которых сделан куб, равно 20. Угол наклона плоскости $\alpha = 30°$, коэффициент трения между наклонной плоскостью и нижней гранью куба $\mu = 0{,}8$.



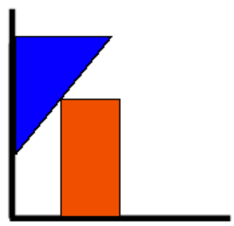
Покой или опрокидывание

Задача 38. (*МОШ, 2016, 10*) На горизонтальном полу стоит табуретка массой $M = 4{,}5$ кг. Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между её ножками $d = 30$ см. Коэффициент трения между ножками и полом $\mu = 0{,}4$. Экспериментатор Глюк привязал к середине стороны сиденья табуретки невесомую нерастяжимую нить, перекинутую через блок (см. рисунок). На втором конце нити висит ведёрко с водой. Масса ведёрка вместе с водой равна $m = 0{,}6$ кг. Экспериментатор Глюк опустил в ведёрко тонкую трубку с внутренним диаметром $D = 4$ мм, по которой в ведёрко стала доливаться вода с постоянной скоростью $v = 0{,}2$ м/с. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2. Через какое время после этого табуретка придёт в движение? Как начнёт двигаться табуретка: скользить, двигаясь поступательно, или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси?



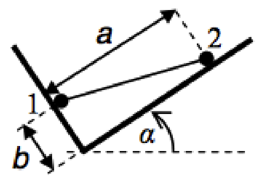
Начнёт опрокидываться через $\tau = \frac{4}{\rho v \pi D^2}\left(\frac{Md}{2h} - m\right) \approx 358$ с

Задача 39. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Клин с углом α при вершине может скользить без трения по вертикальным направляющим и опирается на брусок, стоящий на горизонтальной поверхности. Масса бруска в $n = 2$ раза больше массы клина, высота бруска во столько же раз больше его ширины, коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 2/3$. При каких α брусок может покоиться?



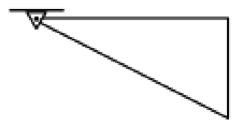
$\alpha > \operatorname{arctg} \frac{n+2}{2n} = 45°$

Задача 40. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) «Гантель» из лёгкого жёсткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую яму в виде прямого двугранного угла, одна из плоскостей которого составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если отношение расстояний от шариков до вершины угла $a/b = 3$. Найти отношение масс шариков.



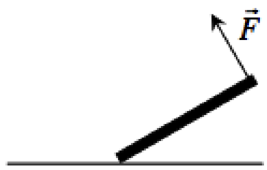
$\frac{m_1}{m_2} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Задача 41. (*«Росатом», 2012, 11*) Вырезанный из листа фанеры прямоугольный треугольник массой m подвешен за одну вершину и удерживается так, что один из его катетов параллелен поверхности земли. Какую минимальную силу нужно приложить для этого к треугольнику? Горизонтальный катет вдвое длиннее вертикального.



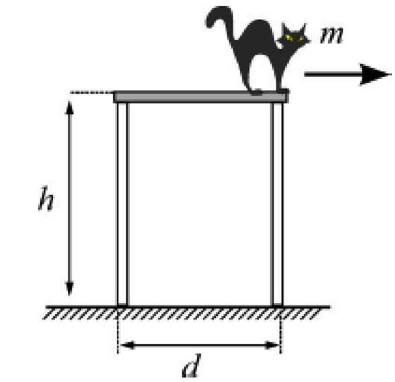
$F = \frac{4mg}{3\sqrt{5}}$

Задача 42. (*«Росатом», 2012, 11*) Человек медленно поднимает за один конец лежащий на полу стержень, прикладывая к нему силу, перпендикулярную стержню (см. рисунок). При каком минимальном коэффициенте трения между стержнем и полом человек сможет поставить стержень вертикально?



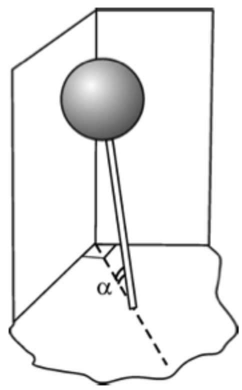
$\mu_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Задача 43. (*МОШ, 2016, 11*) На краю табуретки массой $M = 4{,}5$ кг сидит кошка массой $m = 1{,}5$ кг. Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между ножками $d = 30$ см (см. рисунок). Коэффициент трения между ножками и полом равен $\mu = 0{,}5$. Кошка прыгает с табуретки в направлении, показанном стрелкой. При этом ускорение центра масс кошки направлено горизонтально. При каком максимальном значении модуля этого ускорения табуретка будет оставаться неподвижной? Если модуль ускорения превысит это значение на очень малую величину, то как начнёт двигаться табуретка: скользить по полу или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси? Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с^2.



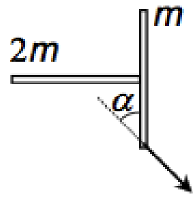
$\boxed{a_{\max} = \frac{gd}{h}\left(1 + \frac{M}{2m}\right) \approx 16{,}7 \text{ м/с}^2\text{; опрокидываться}}$

Задача 44. (*МОШ, 2012, 11*) «Чупа-чупс стоял в углу…» За что его поставили, неясно, но стоять ему не очень-то хотелось. Вот он и стал постепенно отставлять свою «ножку» всё дальше вдоль биссектрисы того прямого угла между стенками, в который его поставили, а «головой» опираясь о стенки (см. рисунок). При каком угле α между ножкой и полом чупа-чупс упадёт? Считать, что вся его масса сосредоточена в однородной шарообразной «голове» радиусом R, расстояние от центра головы до конца ножки равно l, коэффициент трения головы о стенки угла — μ_1, а ножки об пол — μ_2. Решите задачу в общем виде, а затем проведите численный расчёт угла α для случая $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}6$, $l = 4R$.



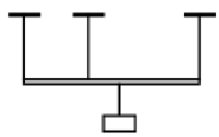
$\boxed{\alpha = \arccos\frac{R\mu_1\mu_2}{l\sqrt{1+\mu_2^2}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{1+\mu_2^2}} \approx 54{,}6^\circ}$

Задача 45. (*«Росатом», 2011 и 2013, 11*) Две тонкие палочки одинаковой длины с массами m и $2m$ образуют букву «Т» (палочка с массой $2m$ прикреплена к середине палочки с массой m под прямым углом к ней). Палочки лежат на шероховатой горизонтальной поверхности (см. рисунок, вид сверху). К одному из концов палочки m привязана нить, за которую систему палочек медленно тянут по поверхности. Какой угол α составляет палочка m с нитью?



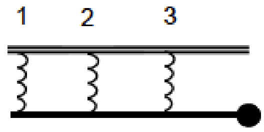
$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}}$

Задача 46. (*«Росатом», 2012, 11*) Невесомый недеформируемый стержень длиной l подвешен на трёх одинаковых вертикальных нитях, привязанных к концам и точке, лежащей на расстоянии $l/3$ от его левого конца (см. рисунок). На каком максимальном расстоянии справа от точки крепления средней нити можно подвесить массивное тело так, чтобы все нити были натянутыми? Считать, что нити упругие, но слабо растяжимые.



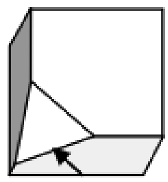
$\boxed{x < \frac{l}{2}}$

Задача 47. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11*) На конце лёгкого стержня, прикреплённого с помощью трёх одинаковых вертикальных невесомых пружин к горизонтальному потолку, находится груз массой m. Расстояние между пружинами и от крайней пружины до груза одинаковы (см. рисунок). Деформации пружин очень малы по сравнению с их длиной, а деформации стержня и потолка много меньше деформаций пружин. Найти силы упругости пружин. Ускорение свободного падения g.



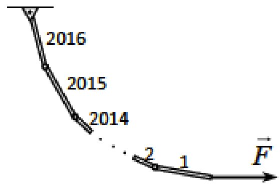
$F_1 = -\frac{2}{3}mg$, $F_2 = \frac{1}{3}mg$, $F_3 = \frac{4}{3}mg$

Задача 48. (*«Росатом», 2015, 11*) Из листа фанеры вырезали равносторонний треугольник массой m и поставили его в угол между тремя взаимно перпендикулярными поверхностями так, что треугольник касается своими сторонами всех трёх граней угла (см. рисунок). Какой минимальной горизонтальной силой нужно действовать на середину нижней стороны треугольника, чтобы он покоился?



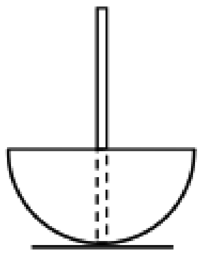
$F = \frac{mg}{3\sqrt{2}}$

Задача 49. (*«Росатом», 2016, 11*) 2016 одинаковых стержней массой m каждый соединены шарнирно и подвешены за 2016-ый стержень к потолку. На нижний конец нижнего стержня действует горизонтальная сила F. Найти угол между 2016-м стержнем и вертикалью в равновесии.



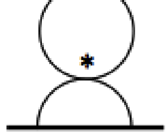
$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2F}{4031mg}$

Задача 50. (*«Росатом», 2013, 11*) Тонкостенная полусфера имеет радиус R. К нижней точке внутренней поверхности полусферы припаян очень тонкий стержень, перпендикулярный поверхности полусферы в точке крепления (см. рисунок). Масса стержня в три раза превосходит массу полусферы. При какой длине стержня нарисованное положение тела будет положением устойчивого равновесия? Ответ обосновать.



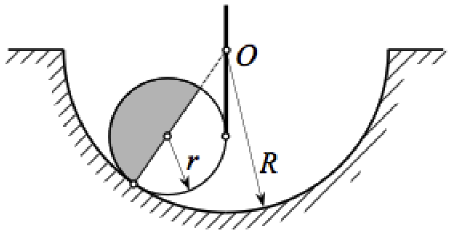
$l < \frac{7}{3}R$

Задача 51. (*«Росатом», 2015, 11*) На вершину закреплённой полусферы радиуса R ставят шар того же радиуса со смещённым центром тяжести («ванька-встанька»). Центр тяжести шара находится ниже его центра на расстоянии $2R/3$ от центра (см. рисунок; центр тяжести шара показан звездочкой). Будет ли такое положение шара устойчивым? Проскальзывания нет.



Да

Задача 52. (*МОШ, 2018, 11*) Сферическую оболочку наполовину заполнили воском, и воск застыл. Сферу удерживают вертикальной нитью в неподвижной полусферической лунке, как показано на рисунке. При каких значениях коэффициента трения μ сфера с воском будет покоиться? Радиус сферы равен r, радиус лунки $R > 2r$, нить проходит через центр лунки O.



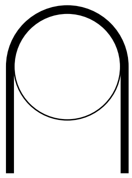
$\boxed{\mu \geqslant \frac{r}{\sqrt{R^2-2Rr}}}$

Метод виртуальных перемещений

С этим мощным методом решения физических задач можно ознакомиться в следующих статьях. Первая из них носит обзорный характер, а вот вторую рекомендуется глубоко проработать.

- А. А. Варламов. Равновесие механической системы и метод виртуальных перемещений. «Квант», 1989, №1.
- А. Варламов, А. Шапиро. Метод виртуальных перемещений. «Квант», 1980, №9. [*Ответы*]

Задача 53. (*МФТИ, 1986*) На гладком блоке радиуса R висит однородный гибкий канат массы m и длины l (см. рисунок). Найти максимальную силу натяжения каната.

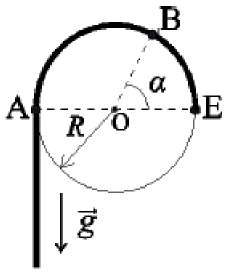


$\boxed{T_{\max} = \frac{mg}{l}\left(R + \frac{l-\pi R}{2}\right)}$

Задача 54. (*«Физтех», 2016, 10–11*) На гладком закреплённом бревне радиусом R висит массивный однородный канат массой m и длиной $l = 7R$, прикреплённый к бревну в точке E (см. рисунок). Точка E и ось O бревна находятся в одной горизонтальной плоскости.

1) Найти силу натяжения каната в точке A.

2) Найти силу натяжения каната в точке B такой, что угол EOB равен α ($\sin\alpha = 2/3$).

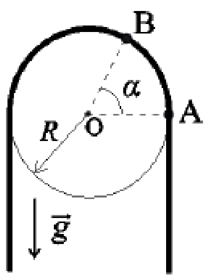


$\boxed{1)\ T_A = \frac{7-\pi}{7}mg;\ 2)\ T_B = \frac{23-3\pi}{21}mg}$

Задача 55. (*«Физтех», 2016, 10–11*) На гладком закреплённом шкиве радиусом R висит массивный однородный канат массой m и длиной $l = 8R$ (см. рисунок). Ось O шкива горизонтальна.

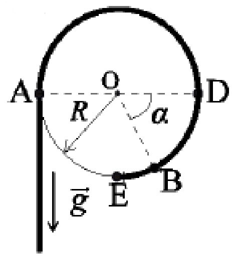
1) Найти силу натяжения каната в точке A.

2) Найти силу натяжения каната в точке B такой, что угол AOB равен α ($\sin\alpha = 3/4$).



$\boxed{1)\ T_A = \frac{8-\pi}{16}mg;\ 2)\ T_B = \frac{19-2\pi}{32}mg}$

Задача 56. (*«Физтех», 2016, 11*) На гладком закреплённом шкиве радиусом R висит массивный однородный канат массой m и длиной $l = 9R$, прикреплённый к шкиву в точке E (см. рисунок). Точка E и горизонтальная ось O шкива находятся в одной вертикальной плоскости.

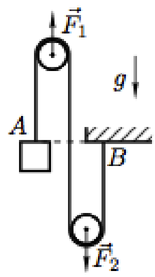


1) Найти силу натяжения каната в точке A.

2) Найти силу натяжения каната в точке B такой, что угол DOB равен α ($\sin\alpha = 3/4$).

1) $T_A = \frac{6-\pi}{6}mg$; 2) $T_A = \frac{11-2\pi}{12}mg$

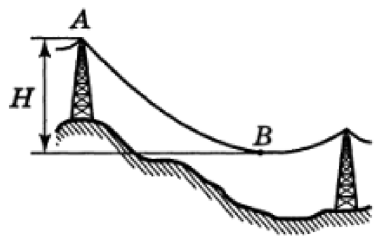
Задача 57. (*Всеросс., 2011, РЭ, 10*) Металлический куб прикреплён в точке A к тяжёлой однородной верёвке, перекинутой через два лёгких блока. Другой конец верёвки закреплён на неподвижной опоре в точке B так, что точки A и B находятся на одинаковой высоте (см. рисунок). Силы $F_1 = 110$ Н и $F_2 = 90$ Н, приложенные к осям блоков, удерживают систему в равновесии. Определите длину верёвки L.



Линейная плотность верёвки (масса единицы длины) равна $\rho = 0{,}25$ кг/м, а $g = 10$ м/с^2. Трения в осях блоков нет. Радиусом блоков по сравнению с длиной верёвки пренебречь нельзя.

$L = \frac{F_1 - F_2}{\rho g} = 8$ м

Задача 58. (*Всеросс., 1997, финал, 10*) В горах проведена линия электропередачи (рис.). Масса провода между двумя опорами m, его длина L. Расстояние по вертикали между нижней точкой провода B и местом крепления его к верхней опоре в точке A равно H. Длина участка AB провода равна l. Найдите максимальную силу натяжения провода.



$T_{\max} = mg\frac{H^2+l^2}{2HL}$

Ответ к задаче 9