

Средняя плотность

Если тело состоит из смеси разных веществ, то можно говорить о *средней плотности* тела, которая равна массе тела, делённой на его объём.

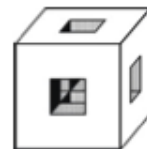
ЗАДАЧА 1. (Всеросс., 2015, МЭ, 7) Школьник Вася решил измерить среднюю плотность кубика льда. Он взвесил кубик, измерил длину его ребра, вычислил объём кубика и разделил его массу на объём. Результат очень удивил Васю: средняя плотность ледяного кубика оказалась равна $0,5 \text{ г/см}^3$, хотя в справочнике было написано, что плотность льда $0,9 \text{ г/см}^3$. Тогда Вася предположил, что в ледяном кубике находится полость, наполненная воздухом. Найдите объём полости, если длина ребра кубика составляет 3 см.

12 см³

ЗАДАЧА 2. (Всеросс., 2017, МЭ, 7) Короб — мера объёма засыпного древесного угля, заготавливаемого на горных заводах. По указу 1847 г. для казённых заводов нормальная форма короба определена как опрокинутая усечённая пирамида с прямоугольным основанием (в четвертях аршина) длиной 12 и шириной 3, вверху длиной 14 и шириной 6, при высоте 6, то есть равная по объёму 22 656 куб. вершков (или по массе 20 пудов угля). По тексту этого указа определите, чему равна средняя плотность засыпанного в короб древесного угля, выраженная в кг/м^3 . Известно, что 1 пуд = 16,38 кг, 16 вершков составляют 1 аршин = 0,711 метра.

167

ЗАДАЧА 3. (Всеросс., 2018, МЭ, 7) Большую коробку доверху заполнили деревянными кубиками, плотно уложив их ровными рядами. Через середины противоположных граней каждого из этих кубиков проделаны по три сквозных квадратных отверстия (схема одного кубика приведена на рисунке). Определите среднюю плотность содержимого коробки, если сторона кубика равна 9 см, а сторона отверстия 3 см. Плотность дерева 800 кг/м^3 .

598 кг/м³

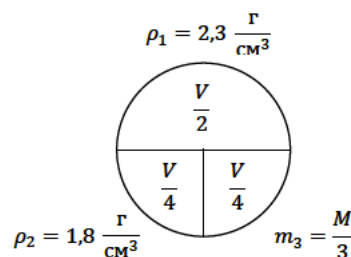
ЗАДАЧА 4. («Курчатов», 2018, 7) Отличник Вася и троечник Петя собирали модели роботов. Петя собрал свою модель таким образом, что объём тела (без головы) в двадцать раз больше объёма головы, а плотность головы в пять раз больше плотности оставшейся части тела. Вася собрал свою модель так, что объём тела (без головы) в двадцать раз больше объёма головы, но плотность головы в пятьдесят раз больше плотности оставшейся части тела. Во сколько раз плотность Васиного робота больше плотности робота Пети?

2,8

ЗАДАЧА 5. («Курчатов», 2017, 7) Яблоко средних размеров имеет объём 225 см^3 , а средняя плотность яблок составляет 800 кг/м^3 . Яблоки фасуют по мешкам таким образом, чтобы масса яблок в мешке была равна 30 кг. Сколько в среднем яблок будет в одном мешке? Сколько яблок уместится в кузове автомобиля грузоподъёмностью 3 тонны при полной загрузке?

167; 16667

ЗАДАЧА 6. (МОШ, 2017, 7) Три детали, изготовленные из разных материалов, склеили так, что получился составной шарик. Объёмы, плотности и масса для некоторых деталей указаны на рисунке, где M и V — масса и объём составного шарика соответственно. Какова средняя плотность шарика?

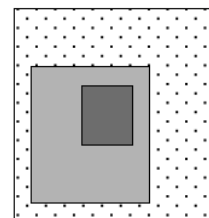


$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\rho_1 \frac{V}{2} + \rho_2 \frac{V}{4} + \rho_2 \frac{V}{4}}{\frac{V}{2} + \frac{V}{4} + \frac{V}{4}} = \frac{2.3 \frac{V}{2} + 1.8 \frac{V}{2}}{\frac{3V}{4}} = \frac{2.3 + 1.8}{0.75} = 5.4 \text{ г/см}^3$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2009, РЭ, 7) В мастерской изготовили из алюминия плотности $\rho_1 = 2,70 \text{ г/см}^3$ куб с ребром $a = 10 \text{ см}$. Внутри куба осталась полость, которую потом залили свинцом плотности $\rho_2 = 11,30 \text{ г/см}^3$. В результате измерений неопытный лаборант подумал, что перед ним кубик из латуни плотности $\rho = 8,72 \text{ г/см}^3$. Определите объём полости в кубе.

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{\rho_1 a^3 - \rho_1 V_{\text{полость}} + \rho_2 V_{\text{полость}}}{a^3} = 8,72$$

ЗАДАЧА 8. («Максвелл», 2016, РЭ, 7) Однородный кубик со стороной a и плотностью ρ поместили внутрь куска глины с плотностью 4ρ , которому придали форму куба со стороной $2a$. Получившийся куб облепили пластилином плотностью 2ρ , в результате чего получился куб со стороной $3a$ (см. рисунок). Определите среднюю плотность получившейся системы.



$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{V} = \frac{\rho a^3 + 4\rho(2a)^3 - \rho a^3 + 2\rho(2a)^3}{(3a)^3} = \frac{2\rho a^3 + 16\rho a^3 + 8\rho a^3}{27a^3} = \frac{26\rho}{27}$$

ЗАДАЧА 9. («Максвелл», 2014, 7) Шарик накачали гелием. Масса газа составляет 20% от массы всего шарика. Через день, когда часть гелия просочилась через стенки, объём шарика уменьшился в 2 раза, а масса гелия стала составлять 10% от массы всего шарика. Определите, во сколько раз изменилась средняя плотность воздушного шарика.

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m_{\text{шар}} + m_{\text{гелий}}}{V} = \frac{m_{\text{шар}} + 0,2 m_{\text{шар}}}{V} = 1,2 \frac{m_{\text{шар}}}{V}$$

ЗАДАЧА 10. («Максвелл», 2013, 7) В одной стране геолог нашёл чёрный метеорит с вкраплениями золота. Плотность чёрного метеоритного вещества оказалась $\rho_{\text{ч}} = 5000 \text{ кг/м}^3$. Плотность золота $\rho_{\text{з}} = 19800 \text{ кг/м}^3$. Масса всего метеорита $m = 2 \text{ кг}$, а его средняя плотность $\rho = 6000 \text{ кг/м}^3$. На чёрном рынке геологу за чёрный метеорит с ходу предложили 6000\$, и геолог согласился на сделку. Во сколько раз (и в какую сторону) эта сумма отличается от реальной стоимости золота, содержащегося в этом метеорите? В то время тройская унция золота стоила 1700\$, а одна тройская унция равна 31,1 грамма.

$$m_{\text{з}} = \frac{m(\rho_{\text{ч}} - \rho)}{\rho_{\text{з}} - \rho} = \frac{2(6000 - 5000)}{19800 - 5000} \approx 0,146 \text{ кг} \approx 4,6 \text{ г}$$

ЗАДАЧА 11. («Максвелл», 2012, 8) Для изготовления ювелирного сплава взяли серебро ($\rho_{\text{Ag}} = 10,5 \text{ г/см}^3$), золото ($\rho_{\text{Au}} = 19,5 \text{ г/см}^3$) и платину ($\rho_{\text{Pt}} = 21,5 \text{ г/см}^3$). В сплаве отношение объёмов серебра и платины равно 6, объём использованного золота $V_{\text{Au}} = 1,5 \text{ см}^3$, а средняя плотность сплава $\rho_{\text{X}} = 14,3 \text{ г/см}^3$. Найдите массу платины m_{Pt} и серебра m_{Ag} в сплаве. Считайте, что объём сплава равен сумме объёмов его составных частей.

$$\rho_{\text{X}} = \frac{m_{\text{Ag}} + m_{\text{Au}} + m_{\text{Pt}}}{V_{\text{Ag}} + V_{\text{Au}} + V_{\text{Pt}}} = \frac{6\rho_{\text{Ag}}V_{\text{Au}} + \rho_{\text{Au}}V_{\text{Au}} + \rho_{\text{Pt}}V_{\text{Pt}}}{6V_{\text{Au}} + V_{\text{Au}} + V_{\text{Pt}}} = 14,3$$

ЗАДАЧА 12. («Физтех», 2014, 7) Средняя плотность варёной овсяной каши $1,10 \text{ г/см}^3$, плотность сливочного масла 900 кг/м^3 . Сколько масла надо положить в 300 г овсяной каши, чтобы средняя плотность у каши с маслом стала $1,08 \text{ г/см}^3$?

127

ЗАДАЧА 13. (Олимпиада Физтех-лицея, 2015, 7–8) Бронзовая медаль олимпийских игр имеет массу $M = 100 \text{ г}$ и плотность $\rho = 8,6 \text{ г/см}^3$. Известно, что бронза является сплавом меди и олова. Определить массу олова в медали, если плотность олова равна $\rho_o = 7,3 \text{ г/см}^3$, а плотность меди — $\rho_m = 8,9 \text{ г/см}^3$. Ответ выразить в г, округлив до целых.

91

ЗАДАЧА 14. (МОШ, 2016, 7) В тексте одной из задач задачника Григория Остера «Ненаглядное пособие по математике» написано следующее.

«В специальный ящик можно уложить 68 куриных яиц. Если уминать их ногами, то поместится в 100 раз больше».

С точки зрения физики это может показаться странным. Жидкости (в частности, белок и желток куриных яиц) трудно поддаются сжатию. Поэтому плотности белка и желтка практически невозможно изменить, уминая яйца ногами. То же самое справедливо и в отношении яичной скорлупы. Поэтому, если яйца в ящике лежат вплотную друг к другу, то объём содержимого ящика нельзя изменить в такое большое число (100) раз.

Однако в задаче сказано, что ящик — специальный. Можно предположить, что в ящике были специальные перегородки, за счёт которых яйца укладывались не вплотную, а на некотором расстоянии друг от друга, и большую часть объёма ящика занимал воздух. Предположим, что эти перегородки были лёгкими и тонкими: масса и объём всех перегородок пренебрежимо малы по сравнению с массой и объёмом всех яиц. Будем считать также, что при уминании яиц ногами белок и желток не выплёскиваются из ящика. Известно, что средняя плотность одного куриного яйца равна $\rho_0 = 1060 \text{ кг/м}^3$. Зная это, ответьте на следующие вопросы.

- 1) Чему равна средняя плотность содержимого специального ящика с 68 куриными яйцами?
- 2) Чему равна средняя плотность содержимого специального ящика, если в него положили только 40 яиц?

$$\rho = 1060 \text{ кг/м}^3 \approx 1060 \text{ кг/м}^3 \approx 1060 \text{ кг/м}^3 \approx 1060 \text{ кг/м}^3 \approx 1060 \text{ кг/м}^3$$

ЗАДАЧА 15. («Физтех», 2014, 7) Торт Наполеон готовят из большого количества чередующихся слоёв крема и коржей. Для упрощения можно считать, что слои имеют постоянную толщину. Плотность крема больше плотности коржей на 10%, а толщина коржей на 30% больше толщины крема. На сколько процентов средняя плотность торта больше плотности коржей?

На 4,3%

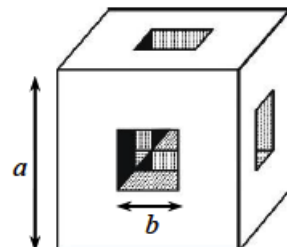
ЗАДАЧА 16. (МОШ, 2008, 7) Ученик измерил плотность деревянного бруска, покрытого краской, и она оказалась равной $\rho = 600 \text{ кг/м}^3$. Но на самом деле брусок состоит из двух частей, равных по массе, плотность одной из которых в два раза больше плотности другой. Найдите плотности обеих частей бруска. Массой краски можно пренебречь.

$$\rho_1 = 300 \text{ кг/м}^3, \rho_2 = 1200 \text{ кг/м}^3$$

Задача 17. (МОШ, 2018, 7) Две одинаковые коробки плотно заполнили доверху красными и белыми кубиками одинакового размера. В первой коробке красных кубиков на 26 больше, чем белых, и средняя плотность содержимого коробки оказалась равна $6,6 \text{ г/см}^3$. Средняя плотность содержимого второй коробки равна $7,5 \text{ г/см}^3$. Объем коробки равен 1 л, масса красного кубика 52 г, белого — 127 г. Кубиков какого цвета во второй коробке больше и на сколько штук?

Красных кубиков на два больше

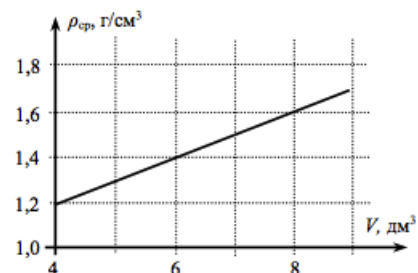
Задача 18. («Максвелл», 2017, РЭ, 7) Из листа жести толщиной $d = 1,0 \text{ мм}$ сварили пустой внутри герметичный поплавок в форме куба со стороной $a = 90 \text{ см}$ и квадратными сквозными отверстиями со стороной $b = 30 \text{ см}$. Определите массу и среднюю плотность поплавка. Плотность жести $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Плотностью воздуха внутри поплавка можно пренебречь.



Примечание. При вычислении средней плотности считайте, что объем поплавка равен объёму вытесненной им жидкости при полном погружении тела в эту жидкость.

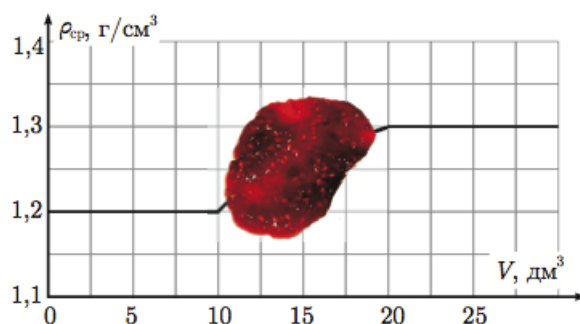
$9,86 \text{ г/см}^3$

Задача 19. («Максвелл», 2018, РЭ, 7) Если в сосуд объёмом V_0 , доверху заполненный жидкостью, опускать камни плотностью $\rho = 2,2 \text{ г/см}^3$, то в зависимости от их объёма V ($V < V_0$) средняя плотность содержимого сосуда будет изменяться, как показано на графике. Определите объем сосуда V_0 и плотность жидкости ρ_0 .



$V_0 = 10 \text{ л}, \rho_0 = 0,8 \text{ г/см}^3$

Задача 20. («Максвелл», 2016, финал, 8) При производстве варенья в большой бак постепенно наливают сироп. В первую порцию, имеющую плотность ρ_1 , добавляют вторую, плотность которой ρ_2 , затем третью с плотностью ρ_3 . На графике (см. рисунок) показано, как изменяется средняя плотность находящегося в баке сиропа по мере заполнения бака. К сожалению, на график капнули готовым вареньем, и часть информации пропала. Найдите массу каждой порции сиропа. До какого объёма V_0 был заполнен бак к тому моменту, когда средняя плотность содержимого составила $\rho_0 = 1250 \text{ кг/м}^3$?



$m_1 = 12 \text{ кг}, m_2 = 14 \text{ кг}, m_3 = 13 \text{ кг}, V_0 = 13,3 \text{ л}$