

Сопротивление среды

Данный листок посвящён задачам, в которых на тело действует сила сопротивления среды (или сила тяги двигателя), пропорциональная скорости или квадрату скорости тела.

ЗАДАЧА 1. («Росатом», 2011 и 2012, 11) Тело массой m , брошенное под углом к горизонту, имеет в верхней точке траектории ускорение $a = 4g/3$ (g — ускорение свободного падения). Определить силу сопротивления воздуха в этой точке.

$$\frac{F_{\text{сопр}}}{m} = f$$

ЗАДАЧА 2. Аэростат массы M опускается с постоянной скоростью. После выбрасывания груза массы m аэростат стал подниматься с той же скоростью. Найдите архимедову силу, действующую на аэростат. Ускорение свободного падения равно g .

$$F_{\text{арх}} - W = F$$

ЗАДАЧА 3. (Всеросс., 2014, ШЭ, 10) Сферическая капля воды падает в воздухе с установившейся скоростью v_0 . С какой установившейся скоростью v будет падать капля воды, имеющая в n раз бóльшую массу? Считайте, что сферическая форма капли не меняется при увеличении её скорости, а сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения и квадрату скорости движения капли. Для справки: объём шара радиусом R равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

$$\frac{v}{v_0} = n$$

ЗАДАЧА 4. (МОШ, 2014, 10–11) Известно, что сила сопротивления, действующая на движущееся в воздухе тело, пропорциональна плотности воздуха, квадрату размера тела и квадрату скорости тела. Пусть металлический шарик падает у поверхности Земли со скоростью 60 м/с. Плотность воздуха у поверхности Земли 1,3 кг/м³, ускорение свободного падения 10 м/с².

А) С какой установившейся скоростью будет падать у поверхности Земли изготовленный из того же материала металлический шарик втрое большего размера? Ответ представьте в м/с и округлите до целых.

В) Какой должна быть плотность воздуха, чтобы установившаяся скорость падения данного шарика составила 4 км/с? Ответ представьте в мг/м³ и округлите до второй значащей цифры.

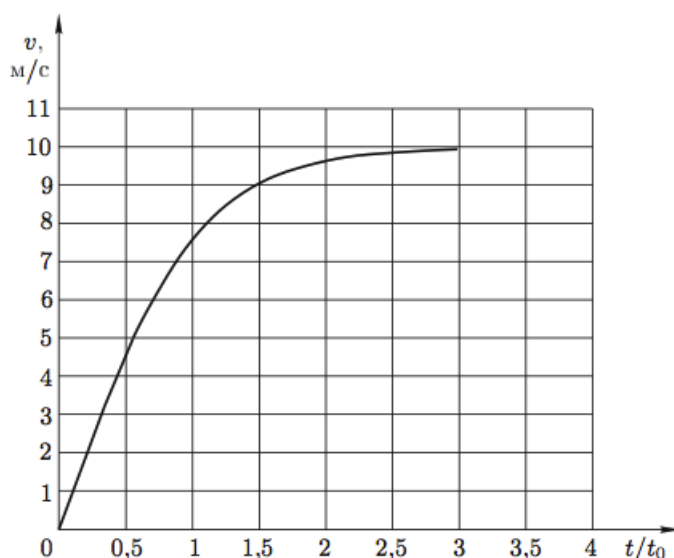
С) Какой будет установившаяся скорость падения данного шарика на планете с ускорением свободного падения 3 м/с², температурой -20°C и давлением 1 кПа? Состав атмосферы считайте земным (молярная масса 29 г/моль). Абсолютный нуль температуры -273°C , универсальная газовая постоянная 8,3 Дж/(моль · К). Ответ представьте в м/с и округлите до десятых.

$$\text{A) } 104; \text{ B) } 290; \text{ C) } 318,9$$

ЗАДАЧА 5. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Наполненный гелием воздушный шарик имеет форму, близкую к сферической. Если отпустить его в безветренную погоду, скорость его установившегося (то есть равномерного) подъёма будет равна v_0 . Этот шарик привязали к багажнику велосипеда. Когда велосипедист на этом велосипеде ехал навстречу ветру со скоростью v относительно земли, нить шарика отклонилась от вертикали на постоянный угол. Найдите этот угол, если скорость ветра равна u . Считать, что при движении шарика в воздухе величина действующей на него силы сопротивления пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха.

$$\frac{v_0}{v} \sin \alpha = u$$

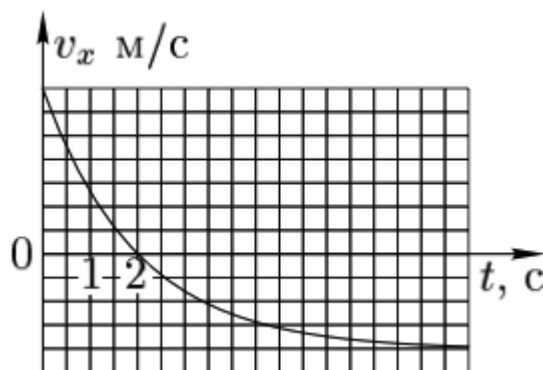
ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2007, ОЭ, 9) Приведён график зависимости скорости падающего на Землю тела массой $m = 1$ кг от времени в единицах t_0 (рис.).



- 1) Определите промежуток времени t_0 .
- 2) Чему равна сила сопротивления воздуха $f(v)$, действующая на тело, движущееся со скоростью а) $v = 10$ м/с; б) $v = 8$ м/с?

$$f(v) = kv^2; \quad f(10) = 20; \quad f(8) = 12.8$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2009, РЭ, 9) В архивах экспериментатора Глюка нашли график (рис.) изменения со временем проекции на вертикальную ось скорости шарика, который был выпущен из пневматического пистолета вертикально вверх с балкона 17-го этажа. Масштаб на оси скорости от времени выцвел, а на оси времени частично сохранился. Определите начальную скорость шарика и скорость, с которой шарик упал на землю. Ветра в день эксперимента не было.

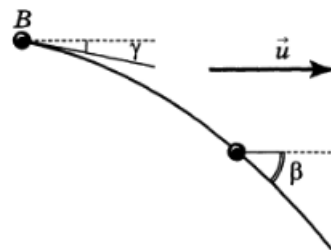


$$v_0 = 20 \text{ м/с}; \quad v_{\text{пад}} = 10 \text{ м/с}$$

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2015, РЭ, 9) Однажды у Карлсона заглох моторчик, и он начал падать вертикально вниз с постоянной скоростью $v_1 = 6$ м/с. После ремонта моторчик стал развивать постоянную силу тяги. Из-за этого при вертикальном подъёме Карлсон выходил на скорость $v_2 = 3$ м/с. С какой постоянной скоростью он двигался в горизонтальном полёте? Считать силу сопротивления воздуха пропорциональной квадрату скорости. Карлсон, будучи в меру упитанным, одинаково обтекаем во всех направлениях.

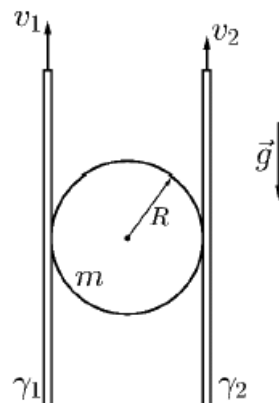
$$\frac{c}{m} \frac{v^2}{g} \approx \frac{v_1^2}{g} + \frac{v_2^2}{g} \frac{v}{v_1} = a$$

ЗАДАЧА 9. (Всеросс., 2001, ОЭ, 10) Тело B удерживается неподвижно в воздушном потоке, движущемся со скоростью \vec{u} . В некоторый момент тело отпускают без начальной скорости. Траектория его движения изображена на рисунке. В установившемся режиме тело падает с постоянной скоростью под углом β к горизонту. Под каким углом γ к горизонту тело начало двигаться? Сила сопротивления воздуха, действующая на тело, пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха и направлена противоположно ей.



$$(g \frac{v^2}{\gamma^2}) \frac{v}{u} = k$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 2017, РЭ, 10) Однородный цилиндр массы m и радиуса R касается двух параллельных длинных вертикальных пластин, движущихся с постоянными скоростями v_1 и v_2 вверх (рис.). Между пластинами и поверхностью цилиндра существует вязкое трение, сила его пропорциональна относительной скорости соприкасающихся поверхностей ($\vec{F}_{\text{тр}} = -\gamma \vec{v}_{\text{отн}}$). Коэффициенты вязкого трения для первой и второй пластин равны γ_1 и γ_2 соответственно.



- 1) Найдите установившуюся угловую скорость цилиндра, а также скорость его центра.
- 2) При каком условии цилиндр будет двигаться вверх?

$$\frac{\gamma_1 v_1 \gamma_2}{\gamma_1 m (\gamma_1 + \gamma_2)} < \gamma_1 + \gamma_2 \left(\gamma_2 \frac{v_2}{\gamma_1 + \gamma_2} - \frac{\gamma_1 v_1 \gamma_2}{\gamma_1 m (\gamma_1 + \gamma_2)} \right) = a, \left(\gamma_1 - \gamma_2 + \frac{\gamma_1 v_1 \gamma_2}{(\gamma_1 - \gamma_2) \gamma_1 m} \right) \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = m (1$$

ЗАДАЧА 11. (Всеросс., 2014, финал, 9) Экспериментатор Глюк бросает шарик от пинг-понга массой m с балкона 17 этажа вертикально вверх со скоростью v_0 . При полёте на шарик действует сила сопротивления, прямо пропорциональная скорости. Перед падением на землю шарик двигался с постоянной скоростью u . Найдите скорость шарика v_{max} , при которой его кинетическая энергия меняется быстрее всего в процессе движения.

$$\text{Если } v_0 > \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{2}{n}} u, \text{ то } v_{\text{max}} = \frac{2}{n}; \text{ иначе } v_{\text{max}} = v_0$$

ЗАДАЧА 12. (*Всеросс., 2017, финал, 9*) В безветренную погоду на озере была проведена серия испытаний радиоуправляемой модели катера с бензиновым двигателем, в ходе которых выяснилось, что при скорости $v_1 = 5,00$ км/ч путевой расход топлива составляет $\lambda_1 = 20,0$ г/км, а при скорости $v_2 = 15,0$ км/ч расход равен $\lambda_2 = 40,0$ г/км. Запас топлива на борту модели $M = 100$ г.

- Выведите зависимость путевого расхода топлива λ от скорости v .
- Какое максимальное время τ_x может работать двигатель у неподвижной модели?
- При какой скорости модели v_0 путевой расход топлива минимален и каково его значение λ_0 ? Полученные результаты должны быть найдены с погрешностью, не превышающей 1%.
- На какое максимальное расстояние L_0 и за какое время τ_0 сможет уплыть модель?
- Какое значение τ_1 может принимать время прохождения моделью расстояния $L_1 = 3$ км?

Примечание. Считайте, что при работе двигателя массовый расход топлива μ (г/с) **линейно** зависит от мощности силы сопротивления, а сила сопротивления **пропорциональна** скорости модели относительно воды. Модель движется равномерно, и при любой скорости её осадка не меняется.

См. конспект

ЗАДАЧА 13. Лодке массой m сообщают скорость v_0 . Какой путь пройдёт лодка до полной остановки? Сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки: $\vec{f} = -k\vec{v}$, где k — известный коэффициент.

$$\frac{v}{\partial t} = s$$

ЗАДАЧА 14. (*МФТИ, 1979*) Человек массы m прыгает с берега в лодку, стоящую в неподвижной воде. Его скорость горизонтальна и равна v_0 . На какое расстояние переместится лодка? Сила трения о воду пропорциональна скорости, и коэффициент пропорциональности равен k .

$$\frac{v}{\partial t} = s$$

ЗАДАЧА 15. (*МФТИ, 2006*) Лодку оттолкнули от берега озера, сообщив ей скорость $v_0 = 1$ м/с. Лодка, двигаясь прямолинейно, имела на расстоянии $s_1 = 14$ м от берега скорость $v_1 = 0,3$ м/с. На каком расстоянии от берега скорость лодки была $v = 0,5$ м/с? Считать, что сила сопротивления движению лодки пропорциональна её скорости.

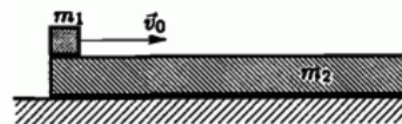
$$v \partial t = \frac{v_0 - v_1}{v_0 - v_1} s = s$$

ЗАДАЧА 16. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 9*) Лодку массой $m = 100$ кг тянули за верёвку по озеру с постоянной скоростью $v_0 = 1$ м/с. В некоторый момент верёвка оторвалась. Какой путь L пройдёт лодка после этого? Считайте, что сила сопротивления зависит только от скорости \vec{v} и ускорения \vec{a} лодки и определяется выражением $\vec{f} = -\alpha\vec{v} - \beta\vec{a}$, где $\alpha = 10$ Н·с/м, $\beta = 50$ Н·с²/м.

Примечание. В гидродинамике величина β называется присоединённой массой.

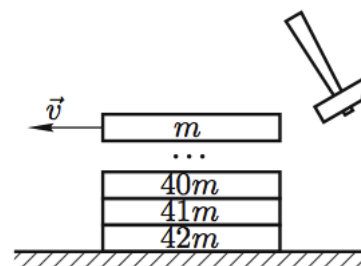
$$v \partial t = \frac{v}{\partial t(\beta + m)} = T$$

ЗАДАЧА 17. (Всеросс., 2003, ОЭ, 10) Маленькая шайба массы m_1 лежит на краю длинной доски массой m_2 , покрытой смазкой (рис.). Трение между шайбой и доской вязкое (сила трения, действующая на шайбу, $\vec{F} = -\alpha\vec{v}_{\text{отн}}$, где $\vec{v}_{\text{отн}}$ — скорость шайбы относительно доски). Система находится на гладкой горизонтальной поверхности. Шайбе сообщают скорость v_0 , направленную вдоль доски. С какими скоростями будут двигаться шайба и доска через достаточно большой промежуток времени? На каком расстоянии L от края доски окажется шайба?



$$\frac{(\alpha m_1 + \Gamma m_2)v}{0 \alpha \alpha \Gamma m_1 m_2} = \Gamma : \frac{\alpha m_1 + \Gamma m_2}{0 \alpha \Gamma m_1} = a$$

ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 2006, финал, 10) На горизонтальном столе один на другом лежат $N = 42$ длинных бруска массами $m, 2m, 3m, \dots, 42m$ (рис.). Они смазаны вязким маслом, так что сила трения между брусками и между нижним бруском и столом пропорциональна относительной скорости u соприкасающихся брусков: $\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha u \vec{v}$, где α — некоторая константа. Сначала все бруски неподвижны, затем верхнему бруску сообщают горизонтальную скорость \vec{v} . Определите смещение n -го бруска относительно $(n + 1)$ -го бруска после остановки брусков. Какой вид примет стопа брусков после остановки?



$$\frac{v}{\alpha m} = u_s$$

ЗАДАЧА 19. («Ломоносов», 2014, 9) Мальчик выстрелил из пневматического пистолета маленьким шариком, направив ствол пистолета вертикально вверх. Спустя время $\tau = 8,7$ с шарик вернулся в точку, откуда был произведён выстрел, имея в момент падения скорость $u_2 = 37$ м/с. Какова скорость u_1 , с которой шарик вылетел из ствола пистолета, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости шарика? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

$$v/n \ 0g = \tau n - \Delta b = \Gamma n$$

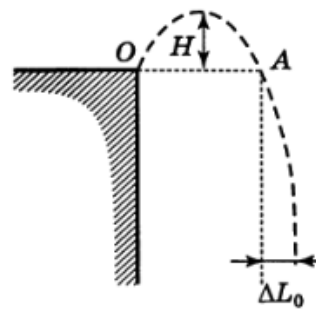
ЗАДАЧА 20. (МФТИ, 1989) Мяч, брошенный с горизонтальной поверхности земли под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $v = 10$ м/с, упал на землю, имея вертикальную составляющую скорости по абсолютной величине на 30% меньшую, чем при бросании. Найти время полёта мяча. Считать, что сила сопротивления движению мяча пропорциональна его скорости.

$$v \ \alpha \ \Gamma \approx \frac{60 \Gamma}{v \ \sin \alpha \ \Gamma} = \tau$$

ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 1998, финал, 10) Тело массой m бросают вертикально вверх с поверхности Земли, вдоль которой с постоянной скоростью u дует ветер. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела и равна $\vec{F} = -k\vec{v}$. Через время τ тело возвращается на землю на расстоянии s от точки бросания с вертикальной составляющей скорости, которая на Δv меньше стартовой скорости. Найдите работу сил трения о воздух за всё время полёта.

$$a \nabla \Delta b m \frac{z}{l} - \tau (s - \Delta n) \frac{m z}{k} = \Delta v$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 1996, финал, 10) Тело брошено под углом к горизонту с высокого обрыва (рис.). Из-за сопротивления воздуха время подъёма тела до наибольшей высоты и время падения до точки A , находящейся на линии горизонта, которая проходит через точку O старта, отличаются на τ . В той же точке A горизонтальная составляющая скорости тела равна v_{TA} , а вертикальная составляющая на Δv меньше вертикальной составляющей скорости в точке O старта. На какую высоту H от линии горизонта поднялось тело, если наибольшее удаление его по горизонтали от точки A за время полета составило ΔL_0 ? Сила сопротивления движению тела в воздухе прямо пропорциональна его скорости.

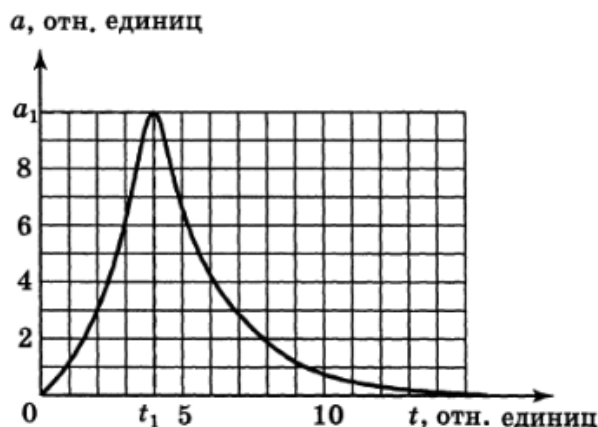


$$(a \nabla + \mu b) \frac{v_{TA} \tau}{v_{TO}} = H$$

ЗАДАЧА 23. (Всеросс., 2004, финал, 11) Футболист бьёт по мячу массой m , сообщая ему начальную скорость v_1 , направленную под углом α к горизонту навстречу ветру, дующему вдоль поверхности земли. Описав некоторую траекторию, мяч вернулся в исходную точку со скоростью v_2 . Под каким углом β мяч упал на землю? Чему равна скорость u ветра? Какое время τ мяч находился в полёте? Силу сопротивления воздуха принять пропорциональной скорости мяча относительно воздуха: $\vec{F}_{\text{сопр}} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$, где коэффициент пропорциональности k — известная величина.

$$\frac{b}{v_{\text{отн}}(v_1 + v_2)} = \mu \text{ : } v_{\text{отн}} \frac{v_1}{v_2} = n \text{ : } v = g$$

ЗАДАЧА 24. (Всеросс., 1993, финал, 10) Заряженная капля уравновешена в вертикально направленном электрическом поле. С момента времени $t = 0$ электрическое поле начинает уменьшаться и к некоторому моменту t_1 обращается в нуль. При этом капля падает. Найдите наибольшее ускорение капли. График изменения ускорения капли со временем приведён на рисунке. Считайте, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости капли.

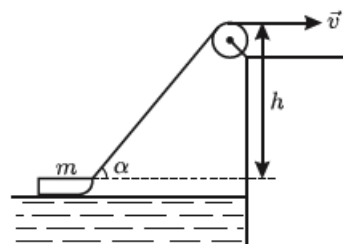


$$b g \tau_0 \approx x_{\text{max}}^p$$

ЗАДАЧА 25. («Физтех», 2015, 10–11) Деревянный диск в форме круга толкнули от одного берега реки к другому, сообщив ему скорость 0,4 м/с против течения под углом α ($\sin \alpha = 0,8$) к линии берега. Через 60 секунд диск достиг другого берега, сместившись вдоль берега вниз по течению на расстояние 2 м (считая от точки на другом берегу, расположенной напротив точки старта). Ширина реки 7 м. Найдите скорость течения реки, считая её одинаковой по всей ширине реки. (Ответ дать в см/с, округлив до целых.)

61

ЗАДАЧА 26. (МОШ, 2009, 10) Лодку массой m подтягивают к берегу за верёвку так, как показано на рисунке. Берег выше уровня воды на величину h . При этом горизонтальный участок верёвки движется равномерно со скоростью v , а на лодку действует со стороны воды сила сопротивления, пропорциональная скорости лодки: $\vec{F} = -\gamma\vec{u}$. В некоторый момент верёвка образует угол α с горизонтом. Найдите силу натяжения верёвки в этот момент. Массой верёвки и трением в блоке пренебречь.



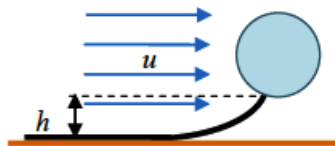
$$\frac{v \sin \alpha}{\cos \alpha} > \frac{v \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{v \cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ или наоборот левая часть: } \frac{v \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{v \cos \alpha}{\sin \alpha} = J$$

ЗАДАЧА 27. (МОШ, 2014, 11) Лодку массой m отправили на другой берег речки, сообщив ей начальную скорость v_0 в направлении, перпендикулярном течению. Ширина речки H , скорость её течения u , а время движения лодки от берега до берега t .

- 1) На какое расстояние l (вдоль берега) снесло лодку течением при переправе?
 - 2) Чему был равен модуль скорости лодки относительно воды в конце переправы, если сила f сопротивления движению, действующая на лодку со стороны воды, пропорциональна скорости лодки $v_{\text{отн}}$ относительно воды ($\vec{f} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$, где k — известный постоянный коэффициент)?
- Считайте, что скорость течения одинакова во всех точках речки.

$$\frac{u}{H} \leq 0 \text{ или } \left(\frac{0_{\text{отн}}}{H} - 1 \right) \frac{v_0}{u} + \frac{0_{\text{отн}}}{u} = a : \left(\frac{0_{\text{отн}}}{H} - 1 \right) n = l$$

ЗАДАЧА 28. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Наполненный гелием воздушный шарик почти идеальной сферической формы, если его отпустить в безветренную погоду, будет подниматься вверх со скоростью, постепенно достигающей величины $v = 3$ м/с. Если привязать к нему кусок тонкой гибкой нерастяжимой однородной верёвки, то шарик сможет подниматься вверх, если длина куска не превышает $l = 50$ см. К шарiku привязали кусок такой же верёвки длиной $L = 1,5$ м и расстелили нижний конец верёвки на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между верёвкой и поверхностью $\mu = 0,5$. С какой скоростью будет в установившемся режиме двигаться шарик с прикрепленной верёвкой при ветре, дующем вдоль поверхности со скоростью $u = 2,5$ м/с? На какой высоте h над поверхностью будет двигаться верхний конец верёвки? Воздействием ветра на верёвку пренебречь. Сила сопротивления воздуха, действующая на шар, пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха.



$$m g \approx \left(\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} + 1 \right) l = \gamma \text{ или } h \approx 26 \text{ см}$$

Задача 29. (МОШ, 2008, 11) На горизонтальном столике лежит маленькая шайба массой $m = 100$ г. Столик покрыт такой смазкой, что при движении шайбы со скоростью v возникает сила вязкого трения, равная $\vec{F}_{\text{тр}} = -\gamma\vec{v}$, где $\gamma = 0,4$ кг/с. Сухого трения нет. На шайбу начинают действовать силой, вектор которой вращается в горизонтальной плоскости с угловой скоростью $\omega = 3$ рад/с, а модуль не меняется со временем и равен $F = 0,3$ Н. В установившемся режиме шайба движется с постоянной скоростью по окружности. Найдите её радиус R .

$$R = \frac{F}{m\omega^2} = 20 \text{ см}$$

Ответ к задаче 12

- $\lambda = \alpha v + \frac{\mu_0}{v}$, где $\alpha = \frac{\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2}{v_1^2 - v_2^2} = 2,5 \frac{\text{Г}\cdot\text{ч}}{\text{км}^2}$, $\mu_0 = \frac{v_1 v_2 (v_1 \lambda_2 - v_2 \lambda_1)}{v_1^2 - v_2^2} = 37,5 \frac{\text{Г}}{\text{ч}}$;
- $\tau_x = \frac{M}{\mu_0} = 160$ мин;
- $v_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\alpha}} = 3,87$ км/ч, $\lambda_0 = 2\sqrt{\alpha\mu_0} = 19,4$ Г/км;
- $L_0 = \frac{M}{\lambda_0} = 5,2$ км, $\tau_0 = \frac{L_0}{v_0} = 80$ мин;
- $15 \text{ мин} \leq \tau_1 \leq 145 \text{ мин}$.