Скорость изображения

Задача 1. Направим ось x вдоль главной оси линзы, ось y — перпендикулярно ей (начало координат можно выбрать произвольно). Пусть предмет находится в точке (x, y) вблизи главной оптической оси линзы и движется со скоростью $\vec{v}$. Обозначим v_x и v_y скорости предмета вдоль координатных осей, u_x и u_y — скорости изображения. Покажите, что

$$u_x = \gamma v_x, \quad u_y = \Gamma v_y,$$

где γ и Γ — соответственно продольное и поперечное увеличение в точке $(x, 0)$.

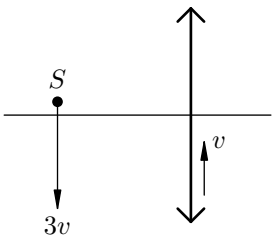
Задача 2. (*«Физтех», 2016, 11*) Маленькая лампочка находится вблизи главной оптической оси тонкой линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см. На экране, расположенном на расстоянии $L = 80$ см от лампочки, получено увеличенное изображение нити накала. Линзу перемещают поступательно и перпендикулярно её главной оптической оси со скоростью $v = 2$ мм/с.

1) Найти расстояние между линзой и лампочкой.

2) Найти скорость изображения на экране.

1) $a = \frac{L-\sqrt{L(L-4F)}}{2} = 20$ см; 2) $u = 8$ мм/с

Задача 3. (*МФТИ, 2008*) Муха S ползёт перпендикулярно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F, находясь вблизи главной оптической оси на расстоянии $5F/3$ от линзы (см. рисунок). Линза перемещается поступательно в противоположном направлении перпендикулярно главной оптической оси. Скорость линзы $v = 1{,}5$ мм/с, скорость мухи $3v$. Муха и главная оптическая ось линзы всегда находятся в плоскости рисунка.

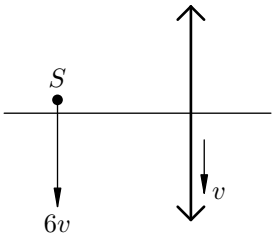


1) Найдите скорость мухи относительно линзы.

2) С какой скоростью движется изображение мухи относительно неподвижного экрана?

1) 6 мм/с; 2) 10,5 мм/с

Задача 4. (*МФТИ, 2008*) Собирающую линзу с фокусным расстоянием F перемещают поступательно со скоростью $v = 3$ мм/с перпендикулярно её главной оптической оси. Муравей S ползёт в том же направлении перпендикулярно главной оптической оси со скоростью $6v$, находясь вблизи главной оптической оси на расстоянии $8F/3$ от линзы (см. рисунок). Муравей и главная оптическая ось линзы всегда находятся в плоскости рисунка.

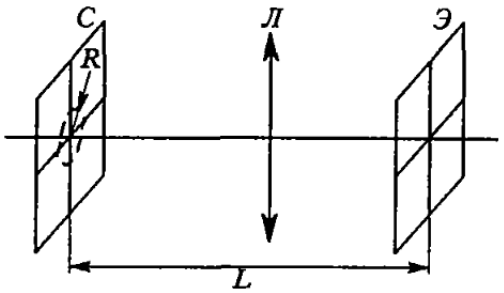


1) Найдите скорость муравья относительно линзы.

2) С какой скоростью движется изображение муравья относительно неподвижного экрана?

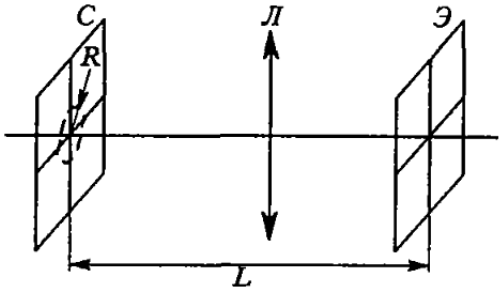
1) 15 мм/с; 2) 6 мм/с

Задача 5. (*МФТИ, 1997*) С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране *Э*, расположенном на расстоянии $L = 4{,}9F$ от стены C, получено увеличенное изображение мухи, которая равномерно ползёт по стене по окружности радиуса $R = 5$ см, совершая один полный оборот за время $T = 1$ мин. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна стене и экрану и проходит через центр окружности, по которой ползёт муха (см. рисунок). Чему равна линейная скорость движущегося изображения мухи на экране?



$v = \frac{2\pi R}{T}\frac{b}{a} = 1{,}3$ см/с, где $a = \frac{L}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4F}{L}}\right) = 1{,}4F$, $b = \frac{L}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4F}{L}}\right) = 3{,}5F$

Задача 6. (*МФТИ, 1997*) С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране *Э*, расположенном на расстоянии $L = 4{,}9F$ от циферблата ручных часов *Ц*, получено уменьшенное изображение секундной стрелки часов, длина которой $R = 1{,}5$ см, (см. рисунок). Главная оптическая ось линзы перпендикулярна экрану и плоскости циферблата часов и проходит через ось вращения секундной стрелки. Чему равна линейная скорость перемещения кончика изображения стрелки на экране?

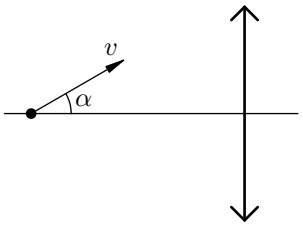


$v = \frac{2\pi R}{T}\frac{b}{a} = 6{,}3$ мм/с, где $a = \frac{L}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4F}{L}}\right) = 3{,}5F$, $b = \frac{L}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4F}{L}}\right) = 1{,}4F$

Задача 7. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Шарик подвешен на нити длиной l и вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, которая проходит через точку подвеса. На расстоянии d от плоскости вращения под шариком находится собирающая линза с фокусным расстоянием $F < d$. Главная оптическая ось линзы совпадает с осью вращения шарика. Чему равна угловая скорость вращения шарика, если его изображение вращается по окружности радиуса R?

$\omega = \frac{\sqrt{gF}}{\sqrt[4]{l^2F^2 - R^2(d-F)^2}}$ при $R < \frac{Fl}{d-f}$; иначе решения нет

Задача 8. (*МФТИ, 2002*) Муха пересекает главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии $a = 3F$, где F — фокусное расстояние линзы, под малым углом α к оси линзы со скоростью v (см. рисунок).



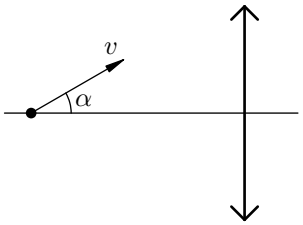
1) Под каким углом изображение мухи пересекает главную оптическую ось?

2) Чему равна в этот момент скорость изображения мухи?

Указание. Для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

1) $\beta \approx 2\alpha$; 2) $u \approx \frac{1}{4}v$

Задача 9. (*МФТИ, 2002*) Комар пересекает главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии $a = 3F/4$, где F — фокусное расстояние линзы, под малым углом α к оси линзы со скоростью v (см. рисунок).



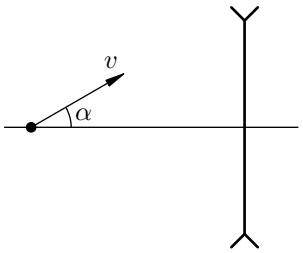
1) Под каким углом изображение комара пересекает главную оптическую ось линзы?

2) Чему равна в этот момент скорость изображения комара?

Указание. Для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

1) $\beta \approx \frac{\alpha}{4}$; 2) $u \approx 16v$

Задача 10. (*МФТИ, 2002*) Жук пересекает главную оптическую ось рассеивающей линзы под малым углом α со скоростью v (см. рисунок). Поперечное увеличение линзы для данного момента $\Gamma = 1/6$.



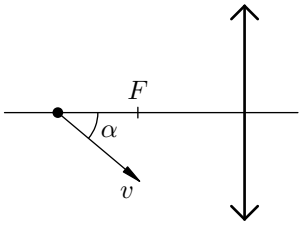
1) Под каким углом изображение жука пересекает главную оптическую ось линзы?

2) Чему равна в этот момент скорость изображения жука?

Указание. Для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$.

1) $\beta \approx 6\alpha$; 2) $u \approx \frac{1}{36}v$

Задача 11. (*«Физтех», 2014*) Фокусное расстояние собирающей линзы равно F. Муха в некоторый момент пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии от линзы $7F/5$, двигаясь со скоростью v под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = 4/3$) к оси линзы (см. рисунок).



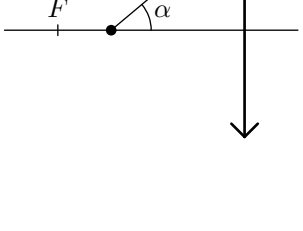
1) На каком расстоянии от линзы находится изображение мухи в этот момент?

2) Под каким углом изображение мухи пересекает главную оптическую ось?

3) Найдите скорость изображения мухи в этот момент.

1) $\frac{7}{2}F$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$; 3) $\frac{17}{4}v$

Задача 12. (*«Физтех», 2014*) Фокусное расстояние собирающей линзы равно F. Комар в некоторый момент пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии от линзы $3F/5$, двигаясь со скоростью v под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = 4/3$) к оси линзы (см. рисунок).



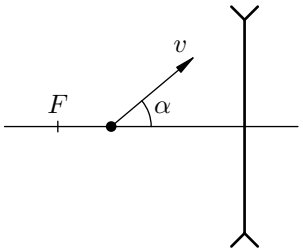
1) На каком расстоянии от линзы находится изображение комара в этот момент?

2) Под каким углом изображение комара пересекает главную оптическую ось?

3) Найдите скорость изображения комара в этот момент.

1) $\frac{3}{2}F$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$; 3) $\frac{17}{4}v$

Задача 13. (*«Физтех», 2014*) Фокусное расстояние (по модулю) рассеивающей линзы равно F. Пчела в некоторый момент пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии от линзы $7F/9$, двигаясь со скоростью v под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = 3/4$) к оси линзы (см. рисунок).



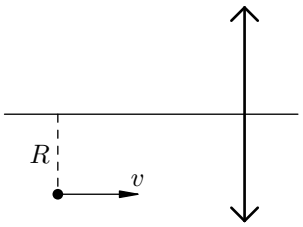
1) На каком расстоянии от линзы находится изображение пчелы в этот момент?

2) Под каким углом изображение пчелы пересекает главную оптическую ось?

3) Найдите скорость изображения пчелы в этот момент.

1) $\frac{7}{16}F$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; 3) $\frac{27}{64}v$

Задача 14. (*«Физтех», 2014*) Муравей ползёт со скоростью $v = 3$ см/с к собирающей линзе с фокусным расстоянием $F = 20$ см вдоль прямой, параллельной её главной оптической оси и расположенной на расстоянии $R = 8F/15$ от оси (см. рисунок). В некоторый момент муравей находится на расстоянии $3F$ от линзы.



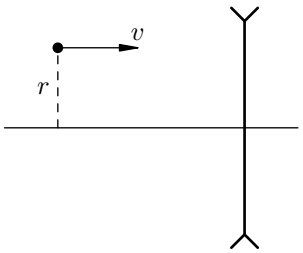
1) На каком расстоянии от линзы находится изображение муравья в этот момент?

2) Под каким углом к главной оптической оси движется изображение муравья? (Найти значение любой тригонометрической функции угла.)

3) Найдите скорость изображения муравья в этот момент.

1) $\frac{3}{2}F = 30$ см; 2) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$; 3) $\frac{17}{60}v = 8{,}5$ мм/с

Задача 15. (*«Физтех», 2014*) Таракан ползёт со скоростью $v = 2$ см/с к рассеивающей линзе с фокусным расстоянием (по модулю) $F = 30$ см вдоль прямой, параллельной её главной оптической оси и расположенной на расстоянии $r = 3F/4$ от оси (см. рисунок). В некоторый момент таракан находится на расстоянии $4F$ от линзы.



1) На каком расстоянии от линзы находится изображение таракана в этот момент?

2) Под каким углом к главной оптической оси движется изображение таракана? (Найти значение любой тригонометрической функции угла.)

3) Найдите скорость изображения таракана в этот момент.

1) $\frac{4}{5}F = 24$ см; 2) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; 3) $\frac{1}{20}v = 1$ мм/с

Задача 16. (*Всеросс., 2015, финал, 11*) Очень маленький, размером с муравья, автомобиль, едет по ровной горизонтальной поверхности вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием f. На его крыше закреплён точечный источник света S, находящийся на главной оптической оси линзы. Скорость автомобиля изменяется так, что скорость изображения S_1 точечного источника S остаётся постоянной и равной v_0. Определите, на каких расстояниях от линзы возможно такое движение «автомобиля». Коэффициент трения между колёсами автомобиля и дорогой равен μ.

$f < l \leqslant f\left(1 + \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^3}}\right)$ или $\begin{cases} f\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\mu g f}{2v_0^2}}\right) \leqslant l < f, & \text{если } v_0 > \sqrt{\frac{\mu g f}{2}}, \\ 0 < l < f, & \text{если } v_0 \leqslant \sqrt{\frac{\mu g f}{2}} \end{cases}$