

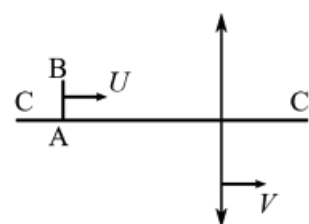
Скорость изображения

ЗАДАЧА 1. Направим ось x вдоль главной оси линзы, ось y — перпендикулярно ей (начало координат можно выбрать произвольно). Пусть предмет находится в точке (x, y) вблизи главной оптической оси линзы и движется со скоростью \vec{v} . Обозначим v_x и v_y скорости предмета вдоль координатных осей, u_x и u_y — скорости изображения. Покажите, что

$$u_x = \gamma v_x, \quad u_y = \Gamma v_y,$$

где γ и Γ — соответственно продольное и поперечное увеличение в точке $(x, 0)$.

ЗАДАЧА 2. («Физтех», 2018, 11) Линза с фокусным расстоянием $F = 20$ см движется со скоростью $V = 1$ мм/с (см. рис.). Стержень АВ длиной $h = 1$ см, расположенный перпендикулярно главной оптической оси линзы CC_1 , движется со скоростью $U = 3V/2$. Все движения — поступательные вдоль главной оптической оси линзы. В некоторый момент стержень находится на расстоянии $d = 3F/2$ от линзы.



1) На каком расстоянии от линзы будет изображение стержня в этот момент?

2) Какой длины будет изображение стержня в этот момент?

3) С какой скоростью будет двигаться изображение точки А стержня в этот момент?

$$f = 20 \text{ см}; \quad V = 1 \text{ мм/с}; \quad U = 1.5 \text{ мм/с}; \quad h = 1 \text{ см}; \quad d = 30 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 3. («Физтех», 2016, 11) Маленькая лампочка находится вблизи главной оптической оси тонкой линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см. На экране, расположенном на расстоянии $L = 80$ см от лампочки, получено увеличенное изображение нити накала. Линзу перемещают поступательно и перпендикулярно её главной оптической оси со скоростью $v = 2$ мм/с.

1) Найти расстояние между линзой и лампочкой.

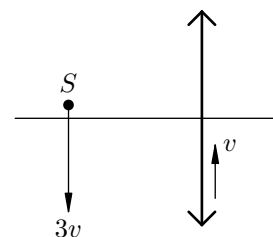
2) Найти скорость изображения на экране.

$$L = 80 \text{ см}; \quad F = 15 \text{ см}; \quad v = 2 \text{ мм/с}$$

ЗАДАЧА 4. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) На экране, расположенном на расстоянии $b = 75$ см от тонкой линзы с оптической силой $D = 4$ дптр, получено чёткое изображение источника. Плоскость экрана параллельна плоскости линзы. Линзу перемещают поступательно со скоростью $v = 0,2$ м/с, причём вектор скорости перпендикулярен её главной оптической оси и лежит в плоскости, проходящей через эту ось и точку расположения источника. С какой скоростью движется по экрану изображение источника?

$$b = 75 \text{ см}; \quad D = 4 \text{ дптр}; \quad v = 0,2 \text{ м/с}$$

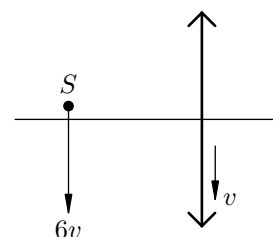
Задача 5. (МФТИ, 2008) Муха S ползёт перпендикулярно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F , находясь вблизи главной оптической оси на расстоянии $5F/3$ от линзы (см. рисунок). Линза перемещается поступательно в противоположном направлении перпендикулярно главной оптической оси. Скорость линзы $v = 1,5$ мм/с, скорость мухи $3v$. Муха и главная оптическая ось линзы всегда находятся в плоскости рисунка.



- 1) Найдите скорость мухи относительно линзы.
- 2) С какой скоростью движется изображение мухи относительно неподвижного экрана?

1) 6 мм/с; 2) 10,5 мм/с

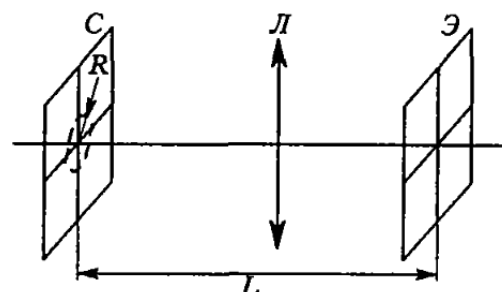
Задача 6. (МФТИ, 2008) Собирающую линзу с фокусным расстоянием F перемещают поступательно со скоростью $v = 3$ мм/с перпендикулярно её главной оптической оси. Муравей S ползёт в том же направлении перпендикулярно главной оптической оси со скоростью $6v$, находясь вблизи главной оптической оси на расстоянии $8F/3$ от линзы (см. рисунок). Муравей и главная оптическая ось линзы всегда находятся в плоскости рисунка.



- 1) Найдите скорость муравья относительно линзы.
- 2) С какой скоростью движется изображение муравья относительно неподвижного экрана?

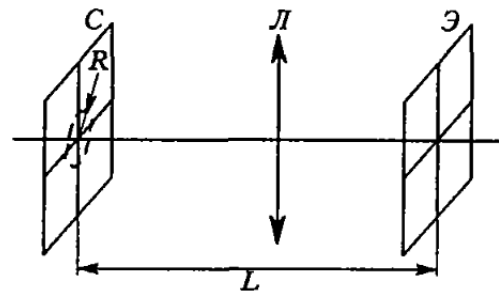
1) 15 мм/с; 2) 6 мм/с

Задача 7. (МФТИ, 1997) С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране \mathcal{E} , расположенном на расстоянии $L = 4,9F$ от стены \mathcal{C} , получено увеличенное изображение мухи, которая равномерно ползёт по стене по окружности радиуса $R = 5$ см, совершая один полный оборот за время $T = 1$ мин. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна стене и экрану и проходит через центр окружности, по которой ползёт муха (см. рисунок). Чему равна линейная скорость движущегося изображения мухи на экране?



$$v_{\text{изб}} = \left(\frac{T}{4F} - 1 \sqrt{1 + 1} \right) \frac{v}{T} = 1,3 \text{ см/с}, \text{ где } a = \frac{v}{b} \frac{L}{2F} = a$$

ЗАДАЧА 8. (МФТИ, 1997) С помощью собирающей линзы с фокусным расстоянием F на экране Э, расположенном на расстоянии $L = 4,9F$ от циферблата ручных часов Ц, получено уменьшенное изображение секундной стрелки часов, длина которой $R = 1,5$ см, (см. рисунок). Главная оптическая ось линзы перпендикулярна экрану и плоскости циферблата часов и проходит через ось вращения секундной стрелки. Чему равна линейная скорость перемещения кончика изображения стрелки на экране?

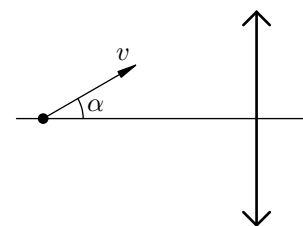


$$v_{\text{изб}} = \left(\frac{L}{F} - 1 \right) \sqrt{\frac{L}{F} - 1} \cdot \frac{R}{T} = v_{\text{стрелки}} \cdot \left(\frac{L}{F} - 1 \right) \sqrt{\frac{L}{F} - 1} = v_{\text{стрелки}} \cdot \left(\frac{L}{F} - 1 \right)^{3/2} = \frac{v_{\text{стрелки}}}{F} \cdot \frac{L^2}{4} = a$$

ЗАДАЧА 9. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Шарик подвешен на нити длиной l и вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, которая проходит через точку подвеса. На расстоянии d от плоскости вращения под шариком находится собирающая линза с фокусным расстоянием $F < d$. Главная оптическая ось линзы совпадает с осью вращения шарика. Чему равна угловая скорость вращения шарика, если его изображение вращается по окружности радиуса R ?

$$\omega_{\text{шарика}} = \frac{R}{d} \cdot \frac{d^2 - F^2}{F} \cdot \omega_{\text{изб}} = \frac{R}{d} \cdot \frac{d^2 - F^2}{F} \cdot \omega_{\text{шарика}} = \omega_{\text{шарика}}$$

ЗАДАЧА 10. (МФТИ, 2002) Муха пересекает главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии $a = 3F$, где F — фокусное расстояние линзы, под малым углом α к оси линзы со скоростью v (см. рисунок).

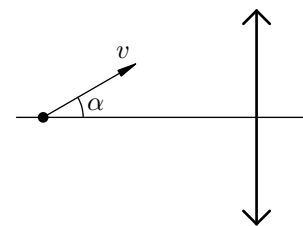


- 1) Под каким углом изображение мухи пересекает главную оптическую ось?
- 2) Чему равна в этот момент скорость изображения мухи?

Указание. Для малых углов $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$.

$$a \frac{v}{T} \approx n \cdot \frac{v}{T} \approx g \cdot \frac{v}{T}$$

ЗАДАЧА 11. (МФТИ, 2002) Комар пересекает главную оптическую ось собирающей линзы на расстоянии $a = 3F/4$, где F — фокусное расстояние линзы, под малым углом α к оси линзы со скоростью v (см. рисунок).



- 1) Под каким углом изображение комара пересекает главную оптическую ось линзы?
- 2) Чему равна в этот момент скорость изображения комара?

Указание. Для малых углов $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$.

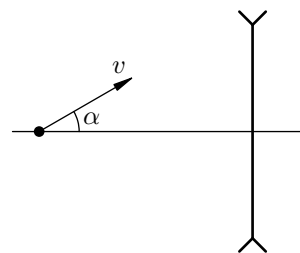
$$a \frac{v}{T} \approx n \cdot \frac{v}{T} \approx g \cdot \frac{v}{T}$$

ЗАДАЧА 12. (МФТИ, 2002) Жук пересекает главную оптическую ось рассеивающей линзы под малым углом α со скоростью v (см. рисунок). Поперечное увеличение линзы для данного момента $\Gamma = 1/6$.

1) Под каким углом изображение жука пересекает главную оптическую ось линзы?

2) Чему равна в этот момент скорость изображения жука?

Указание. Для малых углов $\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha \approx \alpha$.



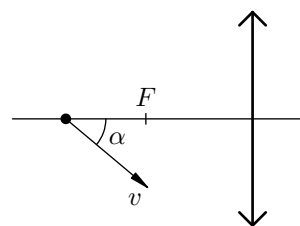
$$a \frac{96}{1} \approx n (z : \text{ог} \approx g (1$$

ЗАДАЧА 13. («Физтех», 2014) Фокусное расстояние собирающей линзы равно F . Муха в некоторый момент пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии от линзы $7F/5$, двигаясь со скоростью v под углом α ($\text{tg } \alpha = 4/3$) к оси линзы (см. рисунок).

1) На каком расстоянии от линзы находится изображение мухи в этот момент?

2) Под каким углом изображение мухи пересекает главную оптическую ось?

3) Найдите скорость изображения мухи в этот момент.



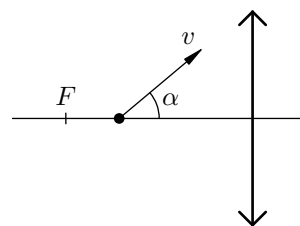
$$a \frac{1}{21} (g : \frac{61}{8} \text{отсле} (z : \text{J } \frac{2}{1} (1$$

ЗАДАЧА 14. («Физтех», 2014) Фокусное расстояние собирающей линзы равно F . Комар в некоторый момент пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии от линзы $3F/5$, двигаясь со скоростью v под углом α ($\text{tg } \alpha = 4/3$) к оси линзы (см. рисунок).

1) На каком расстоянии от линзы находится изображение комара в этот момент?

2) Под каким углом изображение комара пересекает главную оптическую ось?

3) Найдите скорость изображения комара в этот момент.



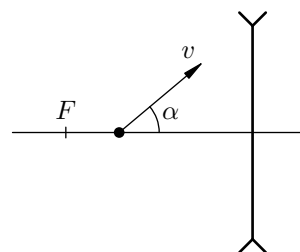
$$a \frac{1}{21} (g : \frac{61}{8} \text{отсле} (z : \text{J } \frac{2}{3} (1$$

ЗАДАЧА 15. («Физтех», 2014) Фокусное расстояние (по модулю) рассеивающей линзы равно F . Пчела в некоторый момент пересекает главную оптическую ось линзы на расстоянии от линзы $7F/9$, двигаясь со скоростью v под углом α ($\text{tg } \alpha = 3/4$) к оси линзы (см. рисунок).

1) На каком расстоянии от линзы находится изображение пчелы в этот момент?

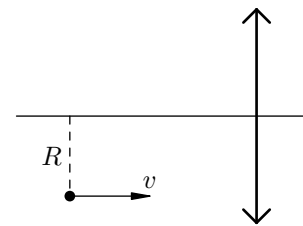
2) Под каким углом изображение пчелы пересекает главную оптическую ось?

3) Найдите скорость изображения пчелы в этот момент.



$$a \frac{19}{22} (g : \frac{3}{4} \text{отсле} (z : \text{J } \frac{91}{2} (1$$

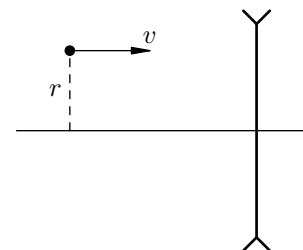
ЗАДАЧА 16. («Физтех», 2014) Муравей ползёт со скоростью $v = 3$ см/с к собирающей линзе с фокусным расстоянием $F = 20$ см вдоль прямой, параллельной её главной оптической оси и расположенной на расстоянии $R = 8F/15$ от оси (см. рисунок). В некоторый момент муравей находится на расстоянии $3F$ от линзы.



- 1) На каком расстоянии от линзы находится изображение муравья в этот момент?
- 2) Под каким углом к главной оптической оси движется изображение муравья? (Найти значение любой тригонометрической функции угла.)
- 3) Найдите скорость изображения муравья в этот момент.

$$v_{\text{изб}}/v = 0,8 = 0,9 \frac{20}{15} \quad (3) \quad \frac{20}{15} \arctg \frac{8}{3} \quad (2) \quad \arctg \frac{8}{3} = \alpha \quad (1)$$

ЗАДАЧА 17. («Физтех», 2014) Таракан ползёт со скоростью $v = 2$ см/с к рассеивающей линзе с фокусным расстоянием (по модулю) $F = 30$ см вдоль прямой, параллельной её главной оптической оси и расположенной на расстоянии $r = 3F/4$ от оси (см. рисунок). В некоторый момент таракан находится на расстоянии $4F$ от линзы.



- 1) На каком расстоянии от линзы находится изображение таракана в этот момент?
- 2) Под каким углом к главной оптической оси движется изображение таракана? (Найти значение любой тригонометрической функции угла.)
- 3) Найдите скорость изображения таракана в этот момент.

$$v_{\text{изб}}/v = 1 = 0,75 \frac{30}{4} \quad (3) \quad \frac{30}{4} \arctg \frac{3}{4} \quad (2) \quad \arctg \frac{3}{4} = \alpha \quad (1)$$

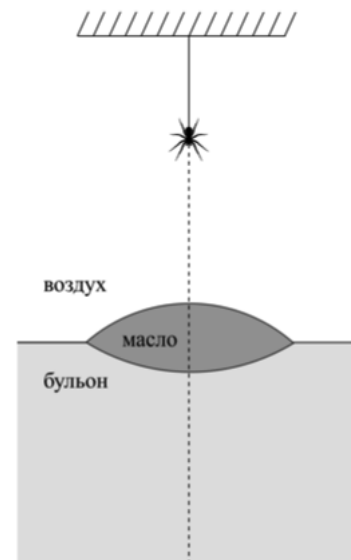
ЗАДАЧА 18. («Покори Воробьёвы горы!», 2018, 10–11) Небольшой светящийся объект равномерно движется вдоль оси тонкой линзы с фокусным расстоянием $|F| = 30$ см. В некоторый момент времени величина скорости движения объекта относительно его мнимого уменьшенного изображения оказывается на $n = 12,5\%$ больше, чем величина его скорости относительно линзы. Найдите расстояние между объектом и линзой в этот момент времени.

$$v_{\text{изб}}/v \approx (1 - \frac{2}{3} + \frac{u}{F}) |F| = v$$

ЗАДАЧА 19. (МОШ, 2008, 11) Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 30$ см создаёт изображение движущегося точечного источника света. Когда источник света пересекал главную оптическую ось линзы, двигаясь под углом $\alpha = 60^\circ$ к ней, угол между скоростью его изображения и этой осью составлял $\beta = 30^\circ$. На каком расстоянии от линзы в этот момент находился источник света?

$$v_{\text{изб}}/v = \left(\frac{v \sin \alpha}{\beta} - 1 \right) F = v \quad \text{или} \quad v_{\text{изб}}/v = \left(\frac{v \sin \alpha}{\beta} + 1 \right) F = v$$

ЗАДАЧА 20. («Курчатов», 2018, 11) На ровном горизонтальном столе находится тарелка с бульоном, на поверхности которого плавают масляные капли. Над тарелкой находится паучок Аркаша, который спускается по паутине с постоянной скоростью v . В некоторый момент времени, оказавшись на высоте h над одной из капель с радиусами кривизны R_1 (поверхность воздух–масло) и R_2 (поверхность бульон–масло), Аркаша увидел свое изображение на дне тарелки. Определите фокусные расстояния линзы, образуемой масляной каплей на поверхности бульона (см. рисунок) и скорость изображения Аркаши в системе отсчёта паучка в этот момент. Показатели преломления масла, бульона и воздуха известны и находятся в соотношении $n_m > n_b > n_v \approx 1$.



$$\frac{1}{f} - \frac{1}{l} = \frac{n_m - n_b}{R_1} + \frac{n_b - n_v}{R_2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{f} - \frac{1}{l} = \frac{n_m - n_b}{R_1} + \frac{n_b - n_v}{R_2}$$

ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 2015, финал, 11) Очень маленький, размером с муравья, автомобиль едет по ровной горизонтальной поверхности вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием f . На его крыше закреплён точечный источник света S , находящийся на главной оптической оси линзы. Скорость автомобиля изменяется так, что скорость изображения S_1 точечного источника S остаётся постоянной и равной v_0 . Определите, на каких расстояниях от линзы возможно такое движение «автомобиля». Коэффициент трения между колёсами автомобиля и дорогой равен μ .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{v_0}{f} \geq 0 \text{ и } \mu < 1 \\ \frac{v_0}{f} < 0 \text{ и } \mu < 1 \end{array} \right\} \text{ или } \left(\frac{v_0}{f} \sqrt{\frac{1}{\mu}} + 1 \right) f \geq l > f$$