

## Сила трения

### Содержание

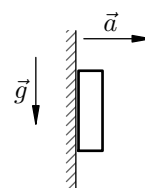
1	Всероссийская олимпиада школьников по физике . . . . .	1
2	Московская олимпиада школьников по физике . . . . .	5
3	МФТИ и «Физтех» . . . . .	6
4	«Росатом» . . . . .	7
5	«Покори Воробьёвы горы!» . . . . .	8
6	«Курчатов» . . . . .	8

Перед решением задач необходимо изучить теорию листка «Сила трения».

**ЗАДАЧА 1.** На горизонтальном полу лежит кирпич массой 3 кг. Коэффициент трения между кирпичом и полом равен 0,2. Кирпич тянут с горизонтальной силой  $F$ . Чему равна сила трения, действующая на кирпич, если а)  $F = 5$  Н; б)  $F = 7$  Н?

$$F_{\text{тр}} = \begin{cases} F & \text{если } F \leq F_{\text{г}} \\ F_{\text{г}} & \text{если } F > F_{\text{г}} \end{cases}$$

**ЗАДАЧА 2.** Вертикально расположенная доска разгоняется с горизонтальным ускорением  $a$  и толкает перед собой брусок. При какой величине  $a$  брусок не будет падать вниз? Коэффициент трения между бруском и доской равен  $\mu$ .



$$a \geq \frac{g}{\mu}$$

**ЗАДАЧА 3.** На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массы  $M$ , а на доске покоится брусок массы  $m$ . Какую горизонтальную силу нужно приложить а) к доске; б) к бруску, чтобы брусок соскользнул с неё? Коэффициент трения между бруском и доской равен  $\mu$ .

$$F \geq \mu(m + M)g \quad \text{а)}$$

### 1 Всероссийская олимпиада школьников по физике

**ЗАДАЧА 4.** (Всеросс., 2016, ШЭ, 10) Известно, что благодаря антикрыльям вес болида Формулы-1 при скорости  $v = 216$  км/ч в 6 раз превышает силу тяжести. Определите, чему равен минимальный радиус поворота  $R$ , по которому способен проехать такой болид на данной скорости. Коэффициент трения между покрышками и поверхностью трассы равен  $\mu = 0,8$ . Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

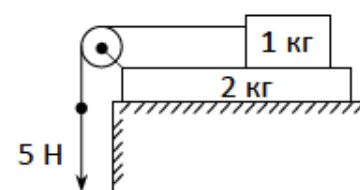
$$R = \frac{v^2}{\mu g} = 100 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2017, ШЭ, 11) На фотографии показана роторная карусель, представляющая собой цилиндрический барабан, вращающийся вокруг вертикальной оси с частотой  $\nu = 33$  оборота в минуту. Люди, которые первоначально стоят прислонившись спинами к внутренней вертикальной стенке барабана, движутся с центростремительным ускорением  $3g$  ( $g = 10 \text{ м/с}^2$ ). В результате этого они «прилипают» к стенке барабана. Для пущего эффекта в некоторый момент пол автоматически опускается. Считая людей достаточно худыми, оцените радиус барабана этой карусели, а также минимальный коэффициент трения между людьми и стенкой барабана карусели, достаточный для того, чтобы люди не скользили вниз.



$$\frac{g}{l} = \pi^2 \nu^2 r \approx \frac{3^2 \pi^2 \nu^2}{9} r = \pi^2 \nu^2 r$$

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2017, МЭ, 10) На столе лежит доска массой  $m_1 = 2 \text{ кг}$ , а на доске находится брусок массой  $m_2 = 1 \text{ кг}$ . К бруску привязана лёгкая нить, второй конец которой перекинут через идеальный блок, закреплённый на краю доски. Коэффициенты трения между доской и столом и между бруском и доской одинаковы и равны  $\mu = 0,1$ . Участок нити между бруском и блоком горизонтален. С какими по модулю ускорениями начнут двигаться брусок и доска, если к вертикальному участку нити приложить направленную вниз силу  $F = 5 \text{ Н}$ ? Ускорение свободного падения можно считать равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

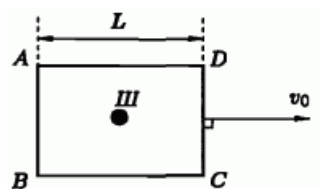


$$\frac{g}{l} = \pi^2 \nu^2 r \approx \frac{3^2 \pi^2 \nu^2}{9} r = \pi^2 \nu^2 r$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2001, ОЭ, 9) Тело, движущееся по горизонтальной поверхности, за промежуток времени  $t_1$  прошло путь  $s_1$ . Какой путь  $s_2$  оно может пройти за последующий промежуток времени  $t_2$ ? Коэффициент трения скольжения тела о поверхность равен  $\mu$ .

$$s_2 = v_0 t_2 + \frac{a t_2^2}{2} = v_0 t_2 + \frac{(\frac{2s_1}{t_1^2} - \mu g) t_2^2}{2}$$

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2003, ОЭ, 9) На горизонтальной поверхности лежит прямоугольная рамка, у которой короткие стенки отстоят друг от друга на расстояние  $L$ . Внутри рамки покоится маленькая шайба III. Рамку начинают двигать по поверхности с постоянной скоростью  $v_0$  (рис.). Определите интервал времени между двумя последовательными столкновениями шайбы с задней стенкой  $AB$  рамки. Коэффициент трения между шайбой III и горизонтальной поверхностью равен  $\mu$ , а удар шайбы о стенки рамки считайте абсолютно упругим.



$$s_2 = v_0 t_2 + \frac{a t_2^2}{2} = v_0 t_2 + \frac{(\frac{2s_1}{t_1^2} - \mu g) t_2^2}{2}$$

ЗАДАЧА 9. (Всеросс., 2004, ОЭ, 9) С противоположных концов однородного изначально неподвижного бруска длиной  $L$ , лежащего на гладкой горизонтальной поверхности, навстречу друг другу пустили две маленькие шайбы. Массы шайб  $m_1 = m$  и  $m_2 = 2m$ , их начальные скорости  $v_1 = v_0$  и  $v_2 = 2v_0$ , коэффициенты трения скольжения между бруском и шайбами одинаковы. Шайбы столкнулись на середине бруска через время  $\tau = 0,4L/v_0$ , имея при этом ненулевые скорости относительно бруска. Найдите массу бруска  $M$  и коэффициент трения скольжения  $k$  шайб по бруску. Ускорение свободного падения равно  $g$ . Будет ли задача иметь решение, если  $\tau = 0,2L/v_0$ ?  $\tau = L/v_0$ ? Ответ обоснуйте.

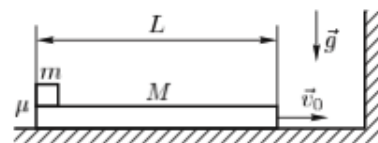
$$\text{лэн цинэшэд } 0\alpha/\tau = \perp \text{ и } 0\alpha/\tau\tau_0 = \perp \text{ илн } \frac{\tau}{m} = N \cdot \frac{\tau \delta v}{v_0 \alpha g} = \eta$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 2011, РЭ, 9) Девятиклассник стоит на границе газона и обледеневшего участка дороги шириной  $L$ . Трение между обувью мальчика и дорогой практически отсутствует. Он решил сначала отбежать назад, а затем, разогнавшись, преодолеть скользкий участок по инерции. Коэффициент трения между обувью и газоном равен  $\mu$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

- 1) Какое наименьшее время  $T_1$  потребуется мальчику, чтобы отбежать от дороги и вновь вернуться к границе обледеневшего участка, разогнавшись до скорости  $v_0$ ?
- 2) Какое наименьшее время  $T$  от момента начала движения понадобится ему для преодоления всего скользкого участка?

$$\left(\frac{L}{v_0} + 1\right) \frac{\delta v}{T} \sqrt{\Lambda} = \tau_L, \left(\frac{L}{v_0} + 1\right) \frac{\delta v}{\delta \alpha} = \tau_L$$

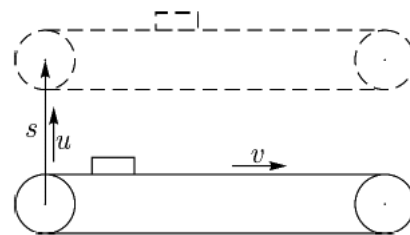
ЗАДАЧА 11. (Всеросс., 2010, РЭ, 10) Доска массы  $M$  и длины  $L$  скользит с некоторой скоростью  $v_0$  по гладкой горизонтальной поверхности. На левом краю доски лежит кубик массы  $m$ . Коэффициент трения скольжения между кубиком и доской равен  $\mu$ .



Доска испытывает абсолютно упругий удар о вертикальную стенку (см. рисунок). При какой максимальной скорости доски  $v_0 = v_{\max}$  кубик с неё не упадёт? Размерами кубика по сравнению с  $L$  пренебречь. В процессе всего движения кубик не опрокидывается.

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right) \tau \delta v \frac{\tau}{L} \sqrt{\Lambda} = v_{\max}$$

ЗАДАЧА 12. (Всеросс., 2016, РЭ, 10) По шероховатому горизонтальному полу движется лежащий на боку ленточный транспортёр так, что плоскость ленты вертикальна. Скорость ленты транспортёра равна  $v$ . Транспортёр перемещается по полу с постоянной скоростью  $u$  перпендикулярно основным участкам его ленты. За некоторое время транспортёр сместился на расстояние  $s$ . Его новое положение показано на рисунке. Транспортёр толкает по полу брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. **На рисунке дан вид сверху на эту систему.**



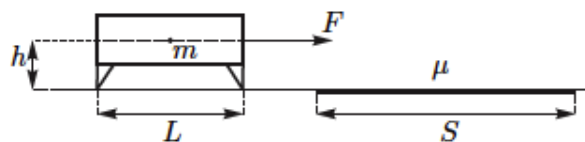
Пренебрегая прогибом ленты и считая движение бруска установившимся, найдите смещение бруска за время  $s/u$ .

Определите работу по перемещению бруска, совершаемую транспортёром за это время.

Коэффициент трения между бруском и полом равен  $\mu_1$ , а между бруском и лентой —  $\mu_2$ . Масса бруска равна  $m$ .

$$\frac{z^n}{z^a} + 1 \sqrt{s b u v t} = v \cdot \frac{z^n}{z^a} + 1 \sqrt{s} = T \text{ ол } 'n z t > a \text{ ил ээ}; \frac{z^n}{z^a} + 1 \sqrt{s} = T \text{ ол } 'n z t < a \text{ ил ээ}$$

ЗАДАЧА 13. (Всеросс., 2016, финал, 9) Скамейку, имеющую массу  $m$  и длину  $L$ , перемещают горизонтальной силой  $F$  (неизвестной и не обязательно постоянной величины) с постоянной скоростью по гладкой горизонтальной поверхности через шероховатую область шириной  $S$  ( $S > L$ ). Сила  $F$  приложена на уровне центра тяжести на высоте  $h$  над поверхностью (см. рисунок). Коэффициент трения между опорами скамейки и шероховатой областью равен  $\mu$ . Полагая, что опоры не отрываются от горизонтальной поверхности, определите работу силы  $F$  при перемещении скамейки через шероховатую область. При каком соотношении параметров  $L$ ,  $\mu$  и  $h$  возможно такое движение?



Скамейку считайте однородной, а её опоры лёгкими.

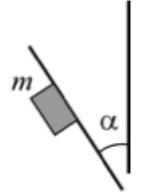
$$v t z < T : \left( \frac{z^4 z^n - z^T}{T z^4 z^n} + S \right) b u v t = v$$

## 2 Московская олимпиада школьников по физике

Задача 14. (МОШ, 2006, 10) На шарнирно закреплённой доске на расстоянии  $R$  от шарнира находится маленькая шайба. Доску, первоначально расположенную горизонтально, начали вращать вокруг шарнира в вертикальной плоскости с угловой скоростью  $\omega$ . При каком значении угла  $\alpha$  наклона доски к горизонту шайба начнёт скользить по доске? Коэффициент трения шайбы о доску  $\mu < 1$ . Ускорение свободного падения равно  $g$ .

$$0 = \text{н эвни :} \delta r \geq \mu r^2 \text{ или } \frac{g r + 1 \wedge \delta}{\mu r^2 \cos} + \mu \sin \alpha < \omega$$

Задача 15. (МОШ, 2014, 10) Магнит массой  $m$  притягивается снизу к плоской металлической плите, образующей угол  $\alpha$  с вертикалью, с постоянной силой  $F = kmg$ , где  $k$  — известный коэффициент ( $k > 1$ ). Коэффициент трения между магнитом и плитой равен  $\mu$ . Найдите модуль ускорения магнита.



$$0 = \text{н ол } \frac{v \sin \alpha}{v \cos} \leq \mu \sin \alpha; (\mu \gamma - v \sin \alpha + v \cos) \delta = v \text{ ол } \frac{v \sin \alpha}{v \cos} > \mu \sin \alpha$$

Задача 16. (МОШ, 2012, 10) На горизонтальном столе лежит деревянный брусок. Коэффициент трения между поверхностью стола и бруском  $\mu = 0,1$ . Если приложить к бруску силу, направленную вверх под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, то брусок будет двигаться по столу с ускорением  $a = 0,18 \text{ м/с}^2$ . Под каким углом  $\beta$  надо приложить к бруску такую же по модулю силу, чтобы брусок двигался по столу равномерно? Ответ округлите до целых градусов. Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

$$0 \approx \mu g, \beta \approx 45^\circ; \beta \approx \frac{(b r + v) \sin \alpha \wedge}{(v \sin \alpha + v \cos) \delta} \sin \alpha \mp \mu \sin \alpha = g$$

Задача 17. (МОШ, 2009, 10) Горизонтальная платформа, на которую положили без начальной скорости груз массой  $m$ , совершает  $f$  раз в секунду такие колебания: сначала она движется вправо с постоянным ускорением  $a$ , потом мгновенно останавливается и возвращается в начальное положение с постоянным ускорением  $a/2$ . Коэффициент трения между грузом и платформой равен  $\mu < 1$ , ускорение  $a \gg g$ , частота  $f \gg 1$  Гц. В каком направлении и по какому закону будет двигаться груз, и будет ли он вообще двигаться? Считать, что скорость движения груза всегда много меньше максимальной скорости движения платформы.

$$\mu r (2 \sqrt{2}) \delta = v \text{ со средним ускорением } b = g$$

Задача 18. (МОШ, 2006, 10) На гладком горизонтальном столе находится тележка массой  $M = 3$  кг. На её поверхность положили лист бумаги массой  $m_0 = 5$  г, а на него — груз массой  $m = 1$  кг. Коэффициент трения между бумагой и каждым из тел равен  $\mu = 0,7$ . Лист бумаги начинают тянуть в горизонтальном направлении с силой  $F$ . Считая, что  $g = 10 \text{ м/с}^2$ , определите значения  $F$ , при которых:

- груз будет неподвижен относительно листа;
- тележка будет неподвижна относительно листа.

Найдите ускорение листа для случаев  $F = 3 \text{ Н}$  и  $F = 10 \text{ Н}$ .

$$\frac{g}{m} \delta \leftarrow \text{н ол } \frac{g}{m} \delta \leftarrow \text{н э } \cdot \left( \frac{M}{m} + 1 \right) \mu r \delta > F (g; \mu r \delta > F > \left( \frac{M}{m} + 1 \right) \mu r \delta (v$$

Задача 19. (МОШ, 2014, 11) Подходящий к станции поезд движется со скоростью  $v = 36$  км/ч. Один из пассажиров поставил чемодан на пол длинного коридора вагона. Но тут поезд начал тормозить, двигаясь до полной остановки равнозамедленно с ускорением, равным по модулю  $a = 2$  м/с<sup>2</sup>. Чемодан при этом стал скользить по полу и прошёл до своей полной остановки путь  $s = 12$  м относительно вагона. Определите коэффициент трения между чемоданом и полом, а также модуль максимальной скорости, которую имел чемодан относительно вагона.

$$\mu \approx \frac{svz + z^2}{asvz} = \frac{svz + z^2}{asvz} \approx \frac{(svz + z^2)\beta}{z^2 \beta} = \mu$$

Задача 20. (МОШ, 2008, 11) Явление застоя заключается в том, что максимальная сила трения покоя при контакте двух тел немного больше, чем сила трения скольжения. Для изучения этого явления провели следующий опыт. К лежащему на горизонтальном столе бруску массой  $m$  прикрепили пружину жёсткостью  $k$ . Свободный конец пружины начали прямолинейно, равномерно и очень медленно перемещать, удаляя его от бруска. В этом опыте брусок двигался скачками, перемещаясь на протяжении одного скачка все время в одном направлении на расстояние  $s$ . Найдите максимальную силу трения покоя  $F$  между столом и бруском. Коэффициент трения скольжения бруска о стол  $\mu$  не зависит от скорости. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

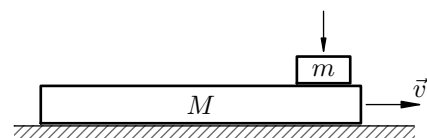
$$\frac{z}{s^2} + b\omega t = \mu$$

### 3 МФТИ и «Физтех»

Задача 21. («Физтех», 2015, 10–11) На гладкой горизонтальной поверхности стола находится доска массой 5 кг. На доске находится брусок массой 0,2 кг. Коэффициент трения между бруском и доской равен 0,25. К бруску прикладывают горизонтальную силу 0,7 Н. Найдите ускорение доски. Принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

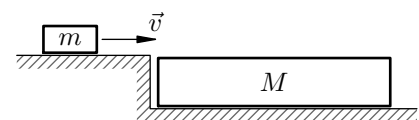
$$z^2 / \mu \approx 0$$

Задача 22. (МФТИ, 1993) На длинную доску массой  $M$ , скользящую по гладкой горизонтальной поверхности стола со скоростью  $v$ , кладут с нулевой скоростью относительно стола шайбу массы  $m$  (см. рисунок). Какое расстояние пройдёт шайба по доске к моменту, когда её скорость относительно доски станет равной нулю? Коэффициент трения между шайбой и доской равен  $\mu$ .



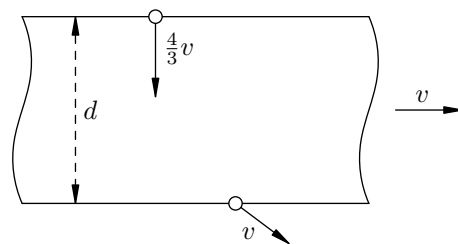
$$\frac{b(\omega + \mu)nz}{z^2 \mu} = s$$

Задача 23. (МФТИ, 1993) На горизонтальной гладкой поверхности стола покоится доска массой  $M$  (см. рисунок). На доску со скоростью  $v$  въезжает шайба массы  $m$ . Какой должна быть длина доски, чтобы шайба не соскользнула с неё? Коэффициент трения скольжения между шайбой и доской равен  $\mu$ , размер шайбы мал по сравнению с длиной доски.



$$\frac{b(\omega + \mu)nz}{z^2 \mu} < l$$

Задача 24. (МФТИ, 2004) На горизонтальной поверхности стола протягивают с постоянной скоростью  $v$  тонкую ленту шириной  $d$ . На ленту въезжает скользящая по столу монета, имея скорость  $4v/3$ , направленную перпендикулярно к краю ленты (см. рисунок). Монета скользит по ленте и покидает её со скоростью  $v$  (относительно стола) под неравным нулю углом к краю ленты.

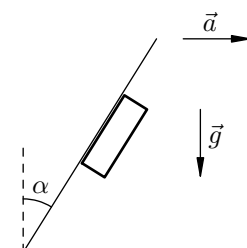


1) Найти скорость монеты (по модулю) относительно ленты в начале движения по ленте.

2) Найти коэффициент трения скольжения между лентой и монетой.

$$\frac{v}{4v/3} = \mu \left( \frac{4v/3}{v} \right) = \mu \left( \frac{4}{3} \right)$$

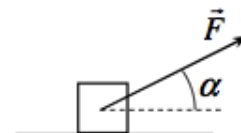
Задача 25. (МФТИ, 2006) Ровная шероховатая доска движется с постоянным горизонтальным ускорением  $a$ , сохраняя постоянный угол наклона  $\alpha$  к вертикали (см. рисунок). Доска толкает перед собой массивный брусок. Оказалось, что при  $a > g$  брусок с доской движутся вместе без проскальзывания, а при  $a < g$  брусок падает вниз. Найдите угол  $\alpha$ , если коэффициент трения между доской и бруском равен  $\mu = 1,5$ .



$$\mu g \approx \left( \frac{a + g \sin \alpha}{g \cos \alpha} \right) g \sin \alpha$$

#### 4 «Росатом»

Задача 26. («Росатом», 2012, 9–11) Тело массой  $m = 2$  кг аккуратно положили на горизонтальную поверхность и подействовали на него силой  $F = 6$  Н, направленной под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту. Коэффициент трения между телом и поверхностью равен  $k = 0,4$ . Найти силу трения, действующую на тело.



$$F \cos \alpha = f$$

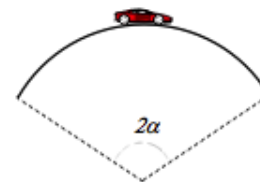
Задача 27. («Росатом», 2011, 9) В нижней точке сферической ямы радиуса  $R = 5$  м находится маленькое тело. Ему ударом сообщают горизонтальную скорость  $v = 5$  м/с. Его полное ускорение сразу после начала движения оказалось равным  $a = 8$  м/с<sup>2</sup>. Определите коэффициент трения  $\mu$ .

$$\mu \approx \frac{v^2 + aR}{v^2} = \mu$$

Задача 28. («Росатом», 2015, 9–10) На горизонтальной доске лежит мел. Коэффициент трения между доской и мелом  $k = 0,3$ . Доске резко сообщают горизонтальную скорость  $v_0 = 5$  м/с, а через время  $\tau = 1$  с резко останавливают. Найти длину следа мела на доске. Считать, что при скольжении по доске мел оставляет след; если мел движется по уже оставленному следу, длина следа не увеличивается.

$$v_0 \tau = \frac{v_0^2}{2k\tau} - L_0 = l$$

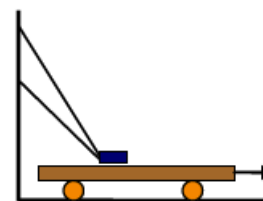
ЗАДАЧА 29. («Росатом», 2011, 10) Автомобиль движется с постоянной скоростью  $v$  по выпуклому мосту, представляющему собой дугу окружности угловой величиной  $2\alpha$ . Радиус кривизны моста равен  $R$ . При каком коэффициенте трения между колёсами и мостом возможно такое движение?



$$\mu \geq \frac{v^2}{gR} \cos \alpha \text{ или } \mu \leq \frac{v^2}{gR} \sin \alpha$$

## 5 «Покори Воробьёвы горы!»

ЗАДАЧА 30. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Небольшой груз массы  $m$  лежит неподвижно на горизонтальной платформе, которую вытягивают из-под него. Его удерживают на месте два отрезка одной лёгкой нерастяжимой нити (см. рисунок). Найти силы натяжения обоих отрезков. Вторые концы отрезков нити закреплены на стене таким образом, что при нахождении груза на платформе они натягиваются одновременно, составляя при этом с горизонталью углы  $60^\circ$  и  $45^\circ$ . Коэффициент трения между грузом и платформой  $\mu = 0,5$ . Ускорение свободного падения  $g$ .



$$T_1 = \frac{mg}{2\sqrt{2}}, T_2 = \frac{mg}{2}$$

## 6 «Курчатов»

ЗАДАЧА 31. («Курчатов», 2014, 10) На виниловый диск, вращающийся со скоростью  $n = 45$  оборотов в минуту, кладут монетку. Если монетку положить на расстоянии  $r = 10$  см от центра диска или ближе, она будет покоиться относительно диска. Если же расстояние от монетки до центра будет больше, она начнёт скользить. Найдите коэффициент трения  $\mu$  между монеткой и поверхностью диска. Ускорение свободного падения  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ .

$$\mu = 0,23$$