

## Самоиндукция

Пусть через катушку протекает электрический ток  $I$ , изменяющийся со временем. Переменное магнитное поле тока  $I$  порождает вихревое электрическое поле, которое «циркулирует» вдоль витков катушки и направлено так, чтобы препятствовать изменению тока (если ток возрастает, то напряжённость  $E$  вихревого электрического поля направлена против тока, замедляя его возрастание; если ток убывает, то напряжённость  $E$  сонаправлена с током, замедляя его убывание).

При прохождении через катушку заряда  $q$  вихревое электрическое поле в витках катушки совершает работу  $A$ . Величина  $\mathcal{E}_i = A/q$  называется *ЭДС индукции* или *ЭДС самоиндукции*. Иными словами, катушка ведёт себя как источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}_i$ , в котором роль сторонней силы играет сила, действующая на заряды со стороны вихревого электрического поля. При этом ЭДС индукции пропорциональна производной силы тока:

$$\mathcal{E}_i = -L\dot{I}, \quad (1)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется *индуктивностью* катушки. Знак «минус» в формуле (1) указывает направление ЭДС индукции: если, например, ток течёт в положительном направлении ( $I > 0$ ) и возрастает ( $\dot{I} > 0$ ), то  $\mathcal{E}_i < 0$  — катушка-источник препятствует току (как бы встречая его своей положительной клеммой); если же ток убывает ( $\dot{I} < 0$ ), то  $\mathcal{E}_i > 0$  — катушка-источник помогает току, встречая его отрицательной клеммой.

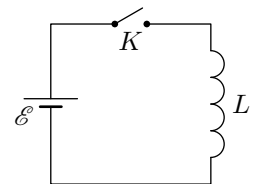
Для контура с катушкой справедливы правила Кирхгофа. При этом сумма напряжений на всех резисторах и конденсаторах контура есть сумма ЭДС источников тока, включённых в контур, плюс ЭДС индукции катушки (формула (1)).

Часто полезно иметь в виду, что напряжение на катушке с нулевым сопротивлением даётся формулой

$$U = L\dot{I}, \quad (2)$$

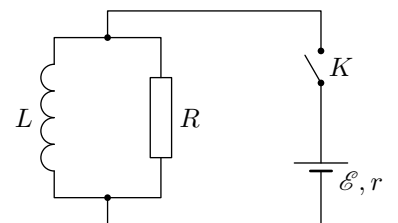
которая вытекает из соотношения  $U + \mathcal{E}_i = 0$  (подробнее — в листке «Переменный ток. 1», раздел «Катушка в цепи переменного тока»). Формулу (2) удобно использовать в ситуациях, когда катушка параллельно подключена к резистору или другой катушке.

**ЗАДАЧА 1.** Катушка индуктивностью  $L$  подключена к источнику постоянного тока, ЭДС которого равна  $\mathcal{E}$  (см. рисунок). Ключ  $K$  вначале разомкнут, и в момент времени  $t = 0$  его замыкают. Найдите зависимость силы тока в цепи от времени. Омическим сопротивлением катушки, внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов пренебречь.



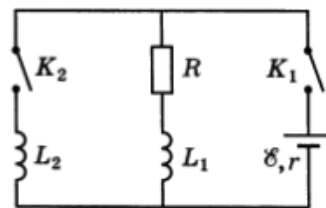
$$\frac{dI}{dt} = I$$

**ЗАДАЧА 2.** Параллельно соединённые катушка индуктивностью  $L$  и резистор сопротивлением  $R$  подключены через ключ  $K$  к батарее с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  (см. рисунок). В начальный момент времени ключ  $K$  разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд протечёт через резистор после замыкания ключа? Сопротивлением катушки пренебречь.



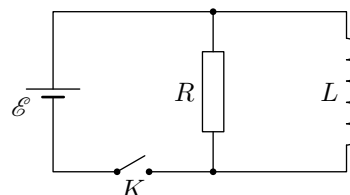
$$\frac{dQ}{dt} = b$$

ЗАДАЧА 3. (Всеросс., 1995, ОЭ, 11) В схеме, изображённой на рисунке, ключи  $K_1$  и  $K_2$  вначале разомкнуты. Ключ  $K_1$  замыкают, и после установления стационарного режима замыкают ключ  $K_2$ . Какой заряд протечёт через резистор  $R$  после замыкания ключа  $K_2$ ? Величины  $R$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $r$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  известны. Сопротивлением катушек индуктивности пренебречь.



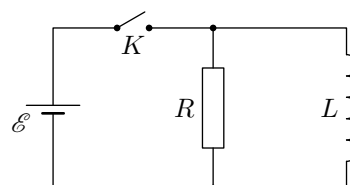
$$\left( \frac{L_2}{\mathcal{E}T} + \frac{L_1 + r}{T} \right) \frac{q}{\mathcal{E}} = b$$

ЗАДАЧА 4. (МФТИ, 2007) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ  $K$  замыкают на некоторое время  $\tau$ , а затем размыкают. Оказалось, что за время, пока ключ был замкнут, через источник протёк заряд  $q$ . Найдите время  $\tau$ .



$$\frac{q}{T} - \frac{\mathcal{E}}{Tb\mathcal{E}} + \frac{L}{T} \left( \frac{q}{T} \right) \Lambda = \tau$$

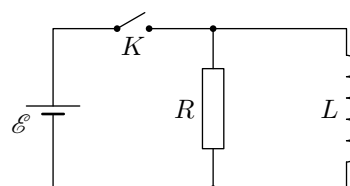
ЗАДАЧА 5. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа  $K$  ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа через катушку протёк заряд  $q_0$ .



- 1) Найдите ток через катушку сразу после размыкания ключа.
- 2) Какой заряд протёк через источник за время, пока ключ был замкнут?

$$\frac{T\mathcal{E}\mathcal{E}}{\mathcal{E}^2 T^2 b} + 0b = b \left( \mathcal{E} : \frac{T}{\mathcal{E}} 0b = 0I \right)$$

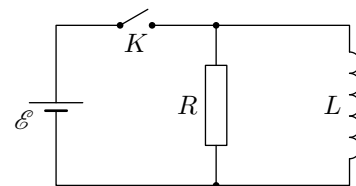
ЗАДАЧА 6. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа  $K$  ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа через резистор протёк заряд  $q_0$ .



- 1) Найдите ток через катушку сразу после размыкания ключа.
- 2) Какой заряд протёк через катушку за время, пока ключ был замкнут?

$$\frac{T\mathcal{E}\mathcal{E}}{\mathcal{E}^2 T^2 b} = Tb \left( \mathcal{E} : \frac{T}{\mathcal{E}} 0b = 0I \right)$$

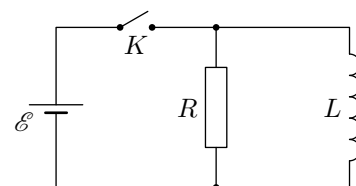
ЗАДАЧА 7. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа  $K$  ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что пока ключ был замкнут, через источник протёк заряд  $q_0$ .



- 1) На какое время замкнули ключ?
- 2) Какой заряд протёк через резистор после размыкания ключа?

$$\frac{\tau \mathcal{E}}{L} - \frac{\mathcal{E}}{R} + \left(\frac{\mathcal{E}}{L}\right) \int \mathcal{E} = \mathcal{E} \left( \tau \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{\mathcal{E}}{R} + \left(\frac{\mathcal{E}}{L}\right) \int \right) = \mathcal{E} \quad (1)$$

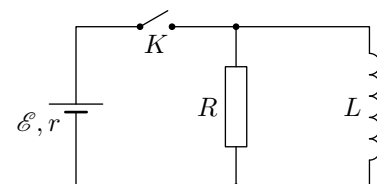
ЗАДАЧА 8. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа  $K$  ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что за время, пока ключ был замкнут, через катушку протёк заряд  $q_0$ .



- 1) Найдите ток в катушке непосредственно перед размыканием ключа.
- 2) Какой заряд протёк через резистор после размыкания ключа?

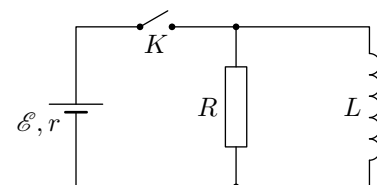
$$\frac{\mathcal{E}}{L} = \mathcal{E} \left( \tau \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{\mathcal{E}}{R} + \left(\frac{\mathcal{E}}{L}\right) \int \right) = \mathcal{E} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 9. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора сопротивлением  $R = 2r$  (см. рисунок). Ключ  $K$  замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через источник равен  $\mathcal{E}/(2r)$ . Какой заряд протечёт через резистор после размыкания ключа? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



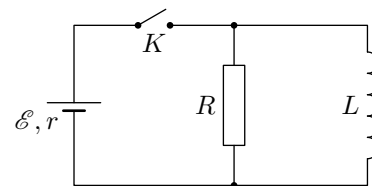
$$\frac{\tau \mathcal{E}}{L} = \mathcal{E}$$

ЗАДАЧА 10. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора сопротивлением  $R = 4r$  (см. рисунок). Ключ  $K$  замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через резистор равен  $\mathcal{E}/(6r)$ . Какой заряд протечёт через катушку после размыкания ключа? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



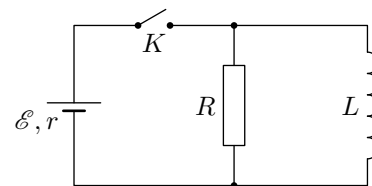
$$\frac{\tau \mathcal{E}}{L} = \mathcal{E}$$

ЗАДАЧА 11. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батарейки с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора сопротивлением  $R = 3r$  (см. рисунок). Ключ  $K$  замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через источник равен  $\mathcal{E}/(2r)$ . Какой заряд протёк через резистор при замкнутом ключе? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



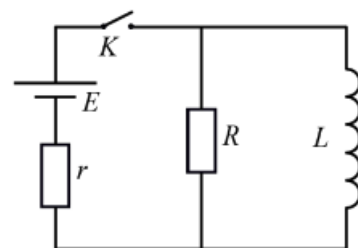
$$\frac{\mathcal{E}^2 L}{\mathcal{E}^2 r} = \mathcal{E} b$$

ЗАДАЧА 12. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батарейки с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора сопротивлением  $R = 6r$  (см. рисунок). Ключ  $K$  замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через резистор равен  $\mathcal{E}/(9r)$ . Какой заряд протёк через резистор при замкнутом ключе? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



$$\frac{\mathcal{E}^2 L}{\mathcal{E}^2 r} = \mathcal{E} b$$

ЗАДАЧА 13. («Физтех», 2018, 11) В цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны на схеме, причём  $R = 3r$ . Ключ  $K$  разомкнут, режим в цепи установился. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. К моменту размыкания скорость роста силы тока в катушке индуктивности уменьшается в 2,5 раза.



1) Найти скорость роста силы тока в катушке сразу после замыкания ключа.

2) Найти силу тока  $I_{\mathcal{E}}$  через источник непосредственно перед размыканием ключа.

3) Какую мощность  $P$  развивает источник непосредственно перед размыканием ключа?

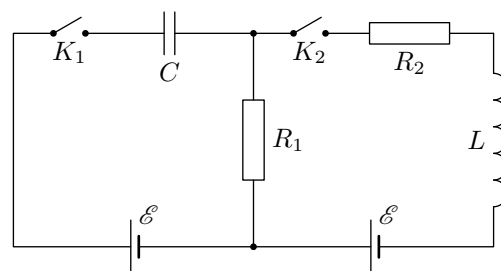
$$\frac{\mathcal{E}^2 L}{\mathcal{E}^2 r} = \mathcal{E} b \left( \mathcal{E} : \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}^2} = \mathcal{E} I \left( \tau : \frac{\tau \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = 0 \right) \right) \frac{\mathcal{E}^2}{\mathcal{E}^2} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Сначала замыкают ключ  $K_1$ , и, когда напряжение на конденсаторе достигает значения  $U_0 = \mathcal{E}/2$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определить:

1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа  $K_2$ ;

2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.

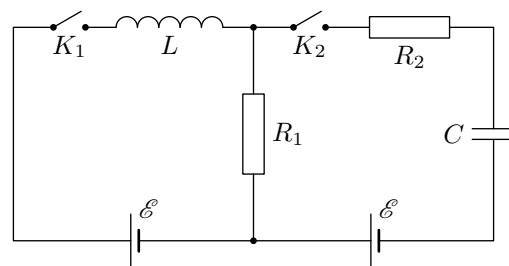
Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\frac{\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}^2}{\mathcal{E}^2 + \mathcal{E}^2} = \mathcal{E} \Omega \left( \tau : \mathcal{E} \frac{\tau}{\mathcal{E}} = \tau \Omega \right) \quad (1)$$

Задача 15. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Вначале замыкают ключ  $K_1$ . Когда ток через катушку индуктивности достигает значения  $I_0$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определить:

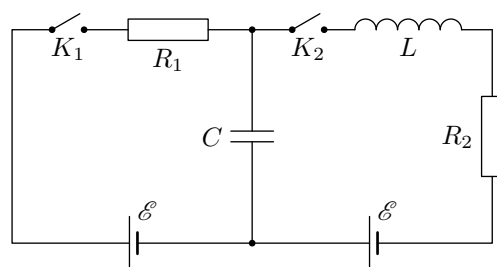
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа  $K_2$ ;
  - 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.
- Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\mathcal{E} = \mathcal{I} \Omega \left( \tau ; \frac{\mathcal{E} R_1 + \mathcal{I} R_2}{\mathcal{E} R_1 + \mathcal{I} R_2 - (\mathcal{E} R_1 + \mathcal{I} R_2) \mathcal{E}} = \tau \Omega \right)$$

Задача 16. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Сначала замыкают ключ  $K_1$ . Когда напряжение на конденсаторе достигает величины  $U_0 = \mathcal{E}/2$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определить:

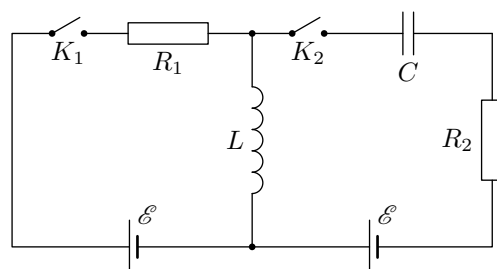
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа  $K_2$ ;
  - 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.
- Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\frac{\mathcal{E} R_1 + \mathcal{I} R_2}{\mathcal{E} R_1 + \mathcal{I} R_2 - (\mathcal{E} R_1 + \mathcal{I} R_2) \mathcal{E}} = \mathcal{I} \Omega \left( \tau ; \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \tau \Omega \right)$$

Задача 17. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Вначале замыкают ключ  $K_1$ . Когда ток через катушку индуктивности достигает значения  $I_0$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определить:

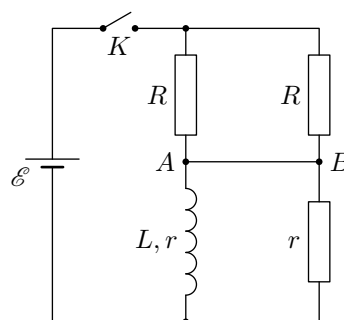
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа  $K_2$ ;
  - 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.
- Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\mathcal{E} = \mathcal{I} \Omega \left( \tau ; \frac{\mathcal{E} R_1 + \mathcal{I} R_2}{\mathcal{E} R_1 + \mathcal{I} R_2 - (\mathcal{E} R_1 + \mathcal{I} R_2) \mathcal{E}} = \tau \Omega \right)$$

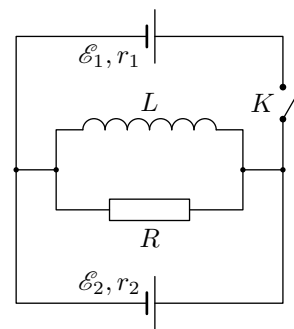
Задача 18. (МФТИ, 2001) В схеме, изображённой на рисунке, в начальный момент ключ  $K$  разомкнут. Катушка с индуктивностью  $L$  обладает омическим сопротивлением  $r$ . Какой заряд протечёт через перемычку  $AB$  после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением перемычки пренебречь. Параметры схемы указаны на рисунке.

$$\frac{\mathcal{E} L}{2r(R+r)} = \mathcal{Q}$$



Задача 19. (МФТИ, 1993) В схеме, изображённой на рисунке, в начальный момент ключ  $K$  разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течёт установившийся ток. Определить величину и направление тока через резистор  $R$  сразу после замыкания ключа  $K$ . Параметры схемы:  $\mathcal{E}_1 = 10$  В, внутреннее сопротивление  $r_1 = 5$  Ом, внутреннее сопротивление второй батареи  $r_2 = 20$  Ом, сопротивление резистора  $R = 4$  Ом.

$$\nabla I = \frac{\varepsilon_1 I_1 + (\varepsilon_2 + I_2) R}{\varepsilon_1 I_2} = \nu I$$

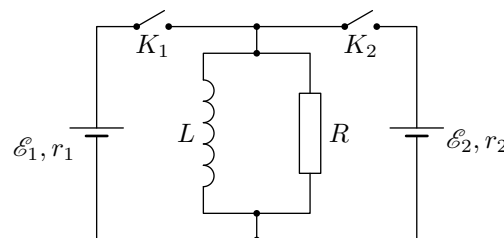


Задача 20. (МФТИ, 2005) В электрической схеме, представленной на рисунке, ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Ключ  $K_1$  замыкают, и после того, как через резистор с сопротивлением  $R$  протёк заряд  $q_0$ , замыкают ключ  $K_2$ .

1) Найти напряжение на катушке индуктивностью  $L$  непосредственно перед замыканием ключа  $K_2$ .

2) Найти дополнительный заряд, протекший через резистор после замыкания ключа  $K_2$ .

ЭДС батарей  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  и их внутренние сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  известны.



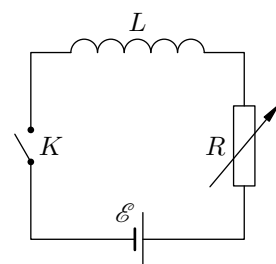
$$\left( \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{I_1}{I_2} \right) \frac{\nu}{T} = b \nabla (\varepsilon : \left( \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} - I_2 \right) \frac{I_1 + \nu}{\nu} = \tau \Omega (I$$

Задача 21. (МФТИ, 1997) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$ , катушки индуктивности  $L$  и переменного сопротивления, начальное значение которого равно  $R_0$  (см. рисунок). Через некоторое время после замыкания ключа  $K$  напряжение на катушке равно  $U_0$ . Начиная с этого момента времени сопротивление  $R$  меняется таким образом, что напряжение на катушке остаётся постоянным и равным  $U_0$ .

1) Определить напряжение на катушке сразу после замыкания ключа  $K$ .

2) Найти зависимость сопротивления от времени.

Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.



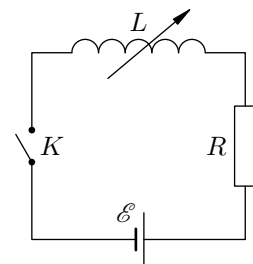
$$\left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \frac{\partial \Omega - \mathcal{E}}{\partial \Omega} + I \right) \partial \nu = (I) \nu (\varepsilon : \mathcal{E} = \tau \Omega (I$$

Задача 22. (МФТИ, 1997) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$ , сопротивления  $R$  и катушки переменной индуктивности, начальное значение которой равно  $L_0$  (см. рисунок). Через некоторое время после замыкания ключа  $K$  на катушке падает напряжение  $U_0$ . Начиная с этого момента времени индуктивность катушки изменяется таким образом, что напряжение на катушке остаётся постоянным и равным  $U_0$ .

1) Определить напряжение на катушке сразу после замыкания ключа  $K$ .

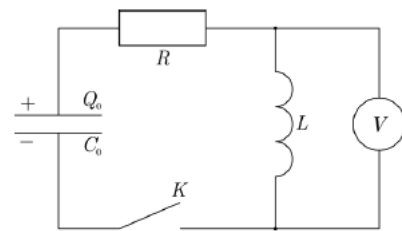
2) Найти зависимость индуктивности катушки от времени.

Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.



$$\nu \frac{\partial \Omega - \mathcal{E}}{\partial \Omega} + \partial T = (I) T (\varepsilon : \mathcal{E} = \tau \Omega (I$$

ЗАДАЧА 23. (Всеросс., 2016, РЭ, 11) В электрической цепи (см. рисунок), состоящей из резистора сопротивлением  $R$ , катушки индуктивностью  $L$ , на конденсаторе ёмкостью  $C_0$  находится заряд  $Q_0$ . В некоторый момент времени замыкают ключ  $K$  и одновременно начинают изменять ёмкость конденсатора так, что идеальный вольтметр показывает постоянное напряжение.



1) Как зависит от времени ёмкость конденсатора  $C(t)$  при изменении  $t$  от 0 до  $t_1 = \sqrt{C_0 L}$ ?

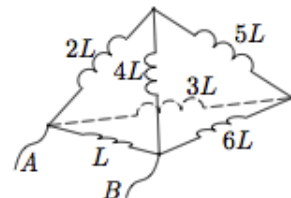
2) Какую работу за время  $t_1$  совершили внешние силы? Считайте, что  $t_1 = L/R = \sqrt{C_0 L}$ .

**Подсказка.** Количество теплоты, выделившейся на резисторе за время  $t_1$ , равно

$$W_R = \int_0^{t_1} I^2(t) R dt = \frac{Q_0^2}{3C_0}.$$

$$\frac{0 \text{ } 0 \text{ } 0}{0 \text{ } 0 \text{ } 0} = V \left( z : \frac{7}{7} + 1 \right) 0 \text{ } 0 = (t) \text{ } 0 \text{ } (1$$

ЗАДАЧА 24. (Всеросс., 2014, РЭ, 11) Шесть идеальных катушек индуктивности соединили в электрическую цепь так, что катушки образовали рёбра тетраэдра (см. рисунок). К вершинам  $A$  и  $B$  подсоединили последовательно соединённые резистор сопротивлением  $R = 100$  Ом, батарейку с ЭДС  $\mathcal{E} = 4,6$  В, миллиамперметр и ключ. Индуктивность катушки  $L = 1$  мГн. Взаимной индуктивностью катушек пренебречь.

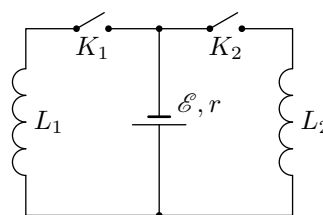


1) Вычислите силу тока  $I_{60}$ , протекающего через миллиамперметр спустя 1 минуту после замыкания ключа.

2) Вычислите силу тока, протекающего через каждую из катушек в тот момент, когда сила тока, протекающего через миллиамперметр, равна  $I_A = 23$  мА.

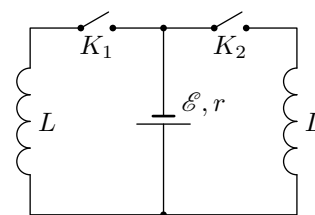
$$0 = 9I, \text{ } \forall \text{ } z = 9I = 3I, \text{ } \forall \text{ } \xi = 4I = 2I, \text{ } \forall \text{ } \delta I = 1I \text{ } (z : \forall \text{ } \text{ } 8I = 1I \text{ } (z : \forall \text{ } \text{ } 9I = \frac{4}{9} = 09I \text{ } (1$$

ЗАДАЧА 25. (МФТИ, 1981) Две катушки индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  подключены через ключи  $K_1$  и  $K_2$  к источнику с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  (см. рисунок). В начальный момент оба ключа разомкнуты. После того как ключ  $K_1$  замкнули и сила тока через катушку индуктивностью  $L_1$  достигла некоторого значения  $I_0$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определите установившиеся силы тока через катушки индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  после замыкания ключа  $K_2$ . Сопротивления катушек пренебречь.



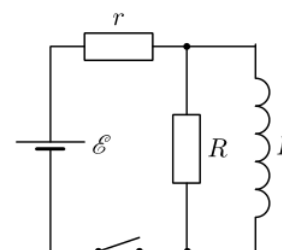
$$\frac{z \text{ } 1 \text{ } 1}{0 \text{ } 1 - 1 / \text{ } \text{ } 1 \text{ } 1} = z \text{ } I, \text{ } \frac{z \text{ } 1 + 1 \text{ } 1}{0 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 1 + 1 / \text{ } \text{ } z \text{ } 1} = 1 \text{ } I$$

ЗАДАЧА 26. (МФТИ, 1981) Две катушки одинаковой индуктивностью  $L$  подключены через ключи  $K_1$  и  $K_2$  к источнику с постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  (см. рисунок). В начальный момент ключи разомкнуты. Затем замыкают ключ  $K_1$ . Определите силу тока, протекающего через ключ  $K_1$  перед замыканием ключа  $K_2$ , если известно, что установившаяся сила тока через ключ  $K_1$  после замыкания ключа  $K_2$  в два раза больше установившейся силы тока через ключ  $K_2$ . Сопротивлениями катушек пренебречь.



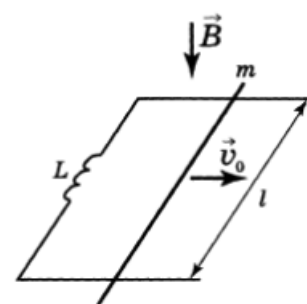
$$\frac{\mathcal{E}}{r} = 0 \text{ I}$$

ЗАДАЧА 27. («Физтех», 2014) В схеме, изображённой на рисунке,  $\mathcal{E} = 7 \text{ В}$ ,  $R = 6r$ . После замыкания ключа происходит процесс установления режима постоянного тока. Найдите напряжение на катушке в момент, когда скорость изменения её энергии была максимальной.



$$\mathcal{E} = \frac{(r+R)\mathcal{E}}{R} = 0 \text{ U}$$

ЗАДАЧА 28. (Всеросс., 1999, ОЭ, 11) Параллельные проводящие неподвижные шины расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии  $l$  друг от друга (рис.). Однородное магнитное поле индукцией  $B$  направлено вертикально. К шинам подсоединена катушка индуктивностью  $L$ . По шинам может скользить без трения проводящая перемычка массой  $m$ , оставаясь перпендикулярной шинам и не теряя с ними электрического контакта. В некоторый момент перемычке сообщают скорость  $v_0$  вдоль шин.



1) Опишите движение перемычки и найдите характерное время её движения.

2) На какое максимальное расстояние сможет удалиться перемычка от первоначального положения?

Сопротивлением катушки, шин, перемычки и подводящих проводов пренебречь.

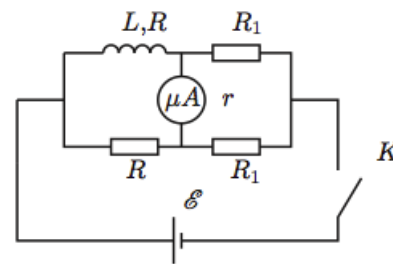
$$\frac{1\mathcal{E}}{r} = \mathcal{V} \left( \frac{r}{R} \right) \sqrt{\frac{L}{m}} = 0 \text{ I}$$

ЗАДАЧА 29. (Всеросс., 2005, финал, 11) Сверхпроводящий соленоид длиной  $l = 10 \text{ см}$  и площадью поперечного сечения  $S = 1,6 \text{ см}^2$  имеет  $N = 1000$  витков. В некоторый момент соленоид подключают к источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 24 \text{ В}$  и внутренним сопротивлением  $r = 0,2 \text{ Ом}$ . Известно, что при индукции магнитного поля  $B_0 = 1,26 \text{ Тл}$  состояние сверхпроводимости обмотки соленоида разрушается. Определите, перейдёт ли в этом эксперименте обмотка соленоида из сверхпроводящего в нормальное состояние, и если да, то через какое время  $t_0$  после подключения, а если нет, то при какой ЭДС  $\mathcal{E}$  источника переход бы произошёл. Магнитная постоянная  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  единиц СИ.

$$\text{on } \mathcal{E} \approx \left( \frac{\mathcal{E} N^2 l}{\mu_0 S} - 1 \right) \text{ и } \frac{1}{S} \frac{1}{N^2} \frac{1}{l} = 0 \text{ I}$$

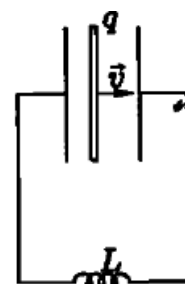


ЗАДАЧА 30. (Всеросс., 2000, финал, 11) В электрической цепи с мостиком Уитстона, изображённой на рисунке, после установления всех токов размыкают ключ  $K$ . Определите, при какой величине сопротивлений  $R_1$  через микроамперметр с внутренним сопротивлением  $r$  после размыкания ключа  $K$  протечет наибольший заряд  $Q$ . Все остальные параметры электрической цепи, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника напряжения и сопротивлением соединительных проводов пренебречь.



$$R_1 = R \sqrt{\frac{2R+r}{r}}$$

ЗАДАЧА 31. (Всеросс., 2002, финал, 11) С одной из пластин изначально незаряженного конденсатора мгновенно отделяется тонкий слой вещества, несущий заряд  $q$ . Затем он движется поступательно как целое с постоянной скоростью  $v$  по направлению к противоположной пластине (рис.). Найдите зависимость тока в цепи от времени, пока слой движется в конденсаторе. Расстояние между пластинами конденсатора  $D$ , площадь поперечного сечения пластин  $S$ , индуктивность катушки  $L$ .



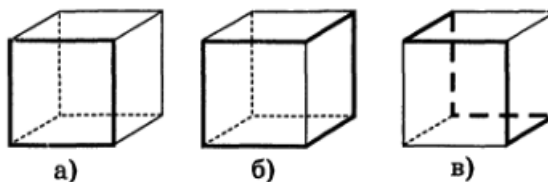
$$I = \frac{qSv}{D} \left( 1 - \exp\left(-\frac{L}{S\mu_0 D} \frac{q}{ab}\right) \right)$$

## Вычисление индуктивности

ЗАДАЧА 32. Найдите индуктивность катушки длиной  $l$  с числом витков  $N$  и площадью витка  $S$ .

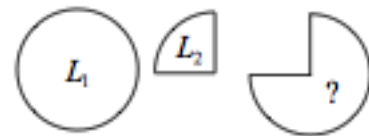
$$\mathcal{L} = \frac{\mu_0 N^2 S l}{l}$$

ЗАДАЧА 33. (Межреспубл., 1992, 11; «Росатом», 2011, 11) Виток тонкого провода, имеющий форму квадрата, обладает индуктивностью  $L_1$  (рис. а). Виток из такого же провода, идущего по рёбрам куба, как это показало на рис. б, имеет индуктивность  $L_2$ . Найдите индуктивность показанного на рис. в витка из такого же провода. (Витки на рисунках выделены толстыми линиями.)



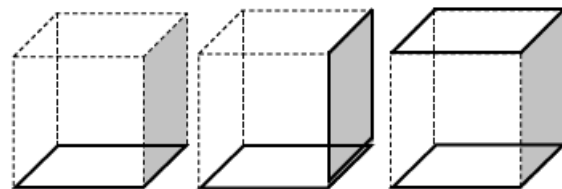
$$\mathcal{L} = (L_1 - L_2) \frac{L_2}{L_1}$$

ЗАДАЧА 34. («Росатом», 2011, 11) Индуктивность кольца известна и равна  $L_1$ . Индуктивность контура, представляющего собой сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол  $\pi/2$ , также известна и равна  $L_2$ . Найти индуктивность контура, представляющего сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол  $3\pi/2$ .



$$\varepsilon L + \nu L \frac{\varepsilon}{\nu} = L$$

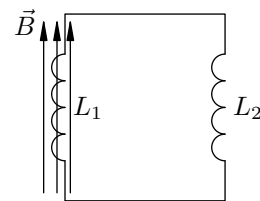
ЗАДАЧА 35. («Росатом», 2018, 11) Индуктивность замкнутого квадратного витка, сделанного из тонкой проволоки, равна  $L$  (левый рисунок). Если рядом с этим витком перпендикулярно его плоскости и без электрического контакта с ним расположить точно такой же по размеру, но сверхпроводящий виток (так, что они образуют соседние грани куба), то индуктивность первого витка станет равна  $L_1$  (средний рисунок). Какой будет индуктивность витка, если сверхпроводящий виток расположить параллельно его плоскости так, что они образуют с первым противоположные грани куба?



$$\left( \left( \frac{\varepsilon}{\nu} - 1 \right)^{\nu-1} - 1 \right) L = \varepsilon L$$

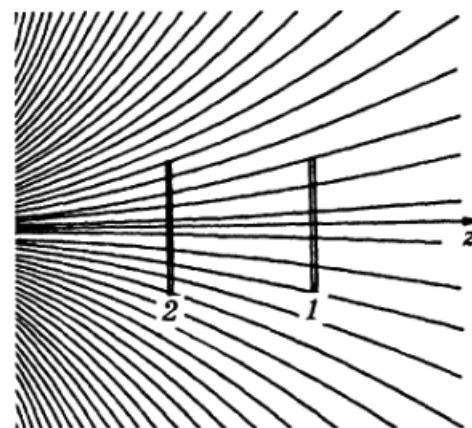
## Сохранение магнитного потока в сверхпроводящем контуре

ЗАДАЧА 36. (МФТИ, 1982) Катушка из  $n_1$  витков, площадь каждого из которых равна  $S$ , расположена в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , которая направлена перпендикулярно виткам катушки. Вне поля расположена вторая катушка (см. рисунок). Обе катушки соединены проводниками. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и проводников, определить величину тока, возникающего в катушках после выключения поля. Индуктивности катушек равны  $L_1$  и  $L_2$ .



$$\frac{\varepsilon L + \nu L}{\varepsilon S \nu} = I$$

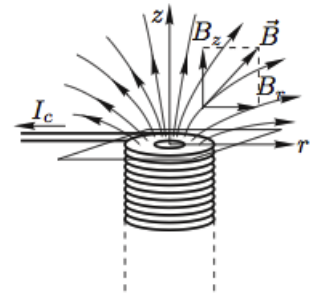
ЗАДАЧА 37. (Всеросс., 1993, финал, 11) Вдали от катушки с круглым цилиндрическим железным сердечником находится кольцо из сверхпроводящего материала. Ток в кольце равен нулю. На рисунке изображены линии индукции магнитного поля вблизи торца катушки; ось  $z$  является осью симметрии магнитного поля катушки. Кольцо вносят в магнитное поле катушки. Сначала кольцо занимает положение 1, а затем — положение 2.



1) Определите отношение  $I_1/I_2$  силы тока, протекающего в кольце, когда оно находится в положении 1, к силе тока в кольце, когда оно находится в положении 2.

2) Определите соотношение сил  $F_1/F_2$ , действующих на кольцо в обоих положениях, и укажите направление действия этих сил.

$$B_z \approx \frac{\mu_0 n I}{2} (1 - \alpha z), \quad B_r \approx \frac{\mu_0 n I}{2} \beta r$$



ЗАДАЧА 38. (Всеросс., 2006, финал, 11) У торца вертикально расположенного длинного соленоида на тонком немагнитном листе лежит соосно с соленоидом круглое тонкое кольцо из сверхпроводника (рис.). В начальном состоянии сила тока в витках соленоида и сила тока в кольце равны нулю. При протекании тока по виткам соленоида вблизи торца возникает неоднородное магнитное поле. Вертикальную  $B_z$  и радиальную  $B_r$  составляющие вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  можно в некоторой ближней области задать с помощью соотношений  $B_z \approx B_0(1 - \alpha z)$ ,  $B_r \approx B_0 \beta r$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые константы, а  $B_0$  определяется силой тока в соленоиде. По виткам соленоида начинают пропускать ток силой  $I$ , постепенно увеличивая его значение. Определите:

1) критическое значение силы тока  $I_0$  в соленоиде, при котором кольцо начинает подниматься над опорой;

2) высоту кольца над опорой при  $I = 2I_0$ ;

3) частоту малых колебаний сверхпроводящего кольца при  $I = 2I_0$ .

Числовые данные:  $\alpha = 36 \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta = 18 \text{ м}^{-1}$ , масса кольца  $m = 100 \text{ мг}$ , коэффициент самоиндукции кольца  $L = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ Гн}$ , площадь кольца  $S = 1 \text{ см}^2$ , магнитная постоянная  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$ , плотность намотки соленоида  $n = 10^3 \text{ м}^{-1}$ .

$$\mu_0 n I_0 = \frac{u}{B_0 \beta} = \frac{u}{\beta} \left( \frac{2 \mu_0 n I_0}{2} \right) = \frac{2 \mu_0 n I_0}{\beta} = \frac{2 \mu_0 n I_0}{\beta} \left( \frac{S \mu_0 n I_0}{L} \right) = \frac{2 \mu_0^2 n^2 I_0^2 S}{\beta L}$$

ЗАДАЧА 39. (Всеросс., 1997, финал, 11) В сверхпроводящем тонком кольце радиусом  $R$ , индуктивностью  $L$  и массой  $M$  течёт наведённый ток  $I_0$ . Кольцо, подвешенное на тонкой неупругой нити, опускают в область горизонтального однородного магнитного поля индукцией  $B$ . В устойчивом положении равновесия угол между вектором  $\vec{B}$  и его проекцией на плоскость кольца равен  $\alpha$ .

1) Найти зависимость угла  $\alpha$  от начального тока  $I_0$  в кольце и построить график  $\alpha = \alpha(I_0)$ .

2) Найти зависимость установившейся силы тока  $I$  в кольце от величины начальной силы тока  $I_0$  и построить график  $I = I(I_0)$ .

3) Для случая, когда  $I_0 > \frac{\pi R^2 B}{L}$ , определить минимальную работу, которую необходимо совершить, чтобы вынуть кольцо из магнитного поля.

См. листок

## Электромагнитный тормоз

Данный раздел посвящён решению красивой задачи, которая была предложена 11-классникам на заключительном этапе Всероссийской олимпиады в 2008 году. Мы обсудим два подхода:

- динамический — пишем второй закон Ньютона для груза и уравнение динамики вращательного движения  $I\dot{\omega} = \mathcal{M}$  для цилиндра;
- энергетический — дифференцируем закон сохранения энергии.

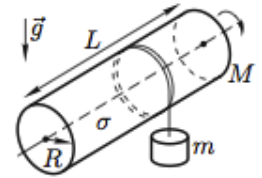
ЗАДАЧА 40. Опробуйте оба подхода на примере следующей простой задачи. Груз массы  $m$  подвешен на невесомой нити, намотанной на тонкостенный цилиндр массы  $M$ . Ось цилиндра горизонтальна, и цилиндр может вращаться вокруг неё без трения. Найти ускорение груза.

$$\frac{u + IV}{b u} = v$$

Задача 41. Вспомните, как из формулы энергии конденсатора  $W = \frac{CU^2}{2}$  получается выражение для объёмной плотности энергии электрического поля  $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ . Аналогично, из формулы энергии катушки  $W = \frac{LI^2}{2}$  выведите выражение для объёмной плотности энергии магнитного поля  $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ .

После этих упражнений можно наконец переходить к обещанной задаче.

Задача 42. (*Всеросс., 2008, финал, 11*) На длинном тонкостенном диэлектрическом цилиндре радиуса  $R$ , длины  $L \gg R$  и массы  $M$  размещён электрический заряд одинаковой поверхностной плотностью  $\sigma$ . Цилиндр может свободно (без трения) вращаться вокруг своей оси под действием груза массы  $m$ , подвешенного на невесомой нити, намотанной на цилиндр (рис.). Определите ускорение груза.



Магнитную постоянную  $\mu_0$  считать заданной.

$$\frac{\tau_{\text{э}} \mu_0 \sigma \omega + w + J\dot{\omega}}{6\pi R} = v$$

Ответ к задаче 39

$$1) \alpha = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{LI_0}{\pi R^2 B}\right), & \text{если } I_0 < \frac{\pi R^2 B}{L}; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } I_0 \geq \frac{\pi R^2 B}{L} \end{cases}$$

$$2) I = \begin{cases} 0, & \text{если } I_0 < \frac{\pi R^2 B}{L}; \\ I_0 - \frac{\pi R^2 B}{L}, & \text{если } I_0 \geq \frac{\pi R^2 B}{L} \end{cases}$$

$$3) A = 2MgR + \pi R^2 B \left( I_0 - \frac{\pi R^2 B}{2L} \right)$$