

## Самоиндукция

Пусть через катушку протекает электрический ток  $I$ , изменяющийся со временем. Переменное магнитное поле тока  $I$  порождает вихревое электрическое поле, которое «циркулирует» вдоль витков катушки и направлено так, чтобы препятствовать изменению тока (если ток возрастает, то напряжённость  $E$  вихревого электрического поля направлена против тока, замедляя его возрастание; если ток убывает, то напряжённость  $E$  сонаправлена с током, замедляя его убывание).

При прохождении через катушку заряда  $q$  вихревое электрическое поле в витках катушки совершает работу  $A$ . Величина  $\mathcal{E}_i = A/q$  называется *ЭДС индукции* или *ЭДС самоиндукции*. Иными словами, катушка ведёт себя как источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}_i$ , в котором роль сторонней силы играет сила, действующая на заряды со стороны вихревого электрического поля. При этом ЭДС индукции пропорциональна производной силы тока:

$$\mathcal{E}_i = -L\dot{I}, \quad (1)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется *индуктивностью* катушки. Знак «минус» в формуле (1) указывает направление ЭДС индукции: если, например, ток течёт в положительном направлении ( $I > 0$ ) и возрастает ( $\dot{I} > 0$ ), то  $\mathcal{E}_i < 0$  — катушка-источник препятствует току (как бы встречая его своей положительной клеммой); если же ток убывает ( $\dot{I} < 0$ ), то  $\mathcal{E}_i > 0$  — катушка-источник помогает току, встречая его отрицательной клеммой.

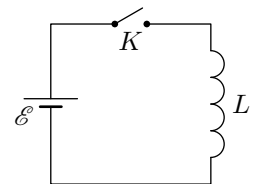
Для контура с катушкой справедливы правила Кирхгофа. При этом сумма напряжений на всех резисторах и конденсаторах контура есть сумма ЭДС источников тока, включённых в контур, плюс ЭДС индукции катушки (формула (1)).

Часто полезно иметь в виду, что напряжение на катушке с нулевым сопротивлением даётся формулой

$$U = L\dot{I}, \quad (2)$$

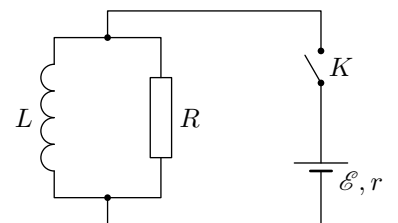
которая вытекает из соотношения  $U + \mathcal{E}_i = 0$  (подробнее — в листке «Переменный ток. 1», раздел «Катушка в цепи переменного тока»). Формулу (2) удобно использовать в ситуациях, когда катушка параллельно подключена к резистору или другой катушке.

**ЗАДАЧА 1.** Катушка индуктивностью  $L$  подключена к источнику постоянного тока, ЭДС которого равна  $\mathcal{E}$  (см. рисунок). Ключ  $K$  вначале разомкнут, и в момент времени  $t = 0$  его замыкают. Найдите зависимость силы тока в цепи от времени. Омическим сопротивлением катушки, внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов пренебречь.



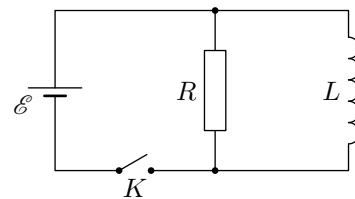
$$\frac{dI}{dt} = I$$

**ЗАДАЧА 2.** Параллельно соединённые катушка индуктивностью  $L$  и резистор сопротивлением  $R$  подключены через ключ  $K$  к батарее с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  (см. рисунок). В начальный момент времени ключ  $K$  разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд протечёт через резистор после замыкания ключа? Сопротивлением катушки пренебречь.



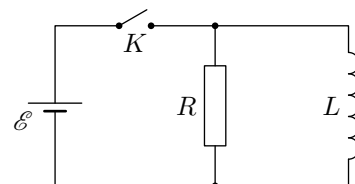
$$\frac{dQ}{dt} = b$$

ЗАДАЧА 3. (МФТИ, 2007) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал. Ключ  $K$  замыкают на некоторое время  $\tau$ , а затем размыкают. Оказалось, что за время, пока ключ был замкнут, через источник протёк заряд  $q$ . Найдите время  $\tau$ .



$$\frac{q}{\tau} - \frac{\mathcal{E}}{\tau R} + \left(\frac{q}{\tau}\right) \Lambda = \mathcal{E}$$

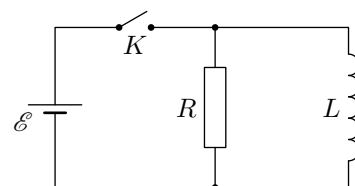
ЗАДАЧА 4. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа  $K$  ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа через катушку протёк заряд  $q_0$ .



- 1) Найдите ток через катушку сразу после размыкания ключа.
- 2) Какой заряд протёк через источник за время, пока ключ был замкнут?

$$\frac{I \mathcal{E} \tau}{\tau R} + q_0 = \mathcal{E} \left( \tau \frac{I}{R} + q_0 = 0 \right) (I)$$

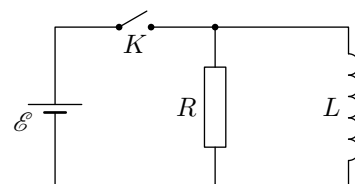
ЗАДАЧА 5. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа  $K$  ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа через резистор протёк заряд  $q_0$ .



- 1) Найдите ток через катушку сразу после размыкания ключа.
- 2) Какой заряд протёк через катушку за время, пока ключ был замкнут?

$$\frac{I \mathcal{E} \tau}{\tau R} = \tau \mathcal{E} \left( \tau \frac{I}{R} + q_0 = 0 \right) (I)$$

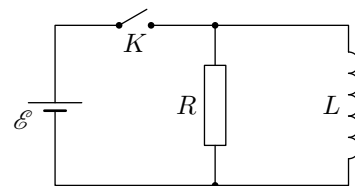
ЗАДАЧА 6. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа  $K$  ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что пока ключ был замкнут, через источник протёк заряд  $q_0$ .



- 1) На какое время замкнули ключ?
- 2) Какой заряд протёк через резистор после размыкания ключа?

$$\frac{q_0}{\tau} - \frac{\mathcal{E}}{\tau R} + \left(\frac{q_0}{\tau}\right) \Lambda = \mathcal{E} \left( \tau \frac{q_0}{\tau} - \frac{\mathcal{E}}{\tau R} + \left(\frac{q_0}{\tau}\right) \Lambda = \mathcal{E} \right) (I)$$

ЗАДАЧА 7. («Физтех», 2008) В схеме, показанной на рисунке, все элементы можно считать идеальными. Параметры элементов указаны на рисунке. До замыкания ключа  $K$  ток в цепи отсутствовал. Ключ замыкают на некоторое время, а затем размыкают. Оказалось, что за время, пока ключ был замкнут, через катушку протёк заряд  $q_0$ .

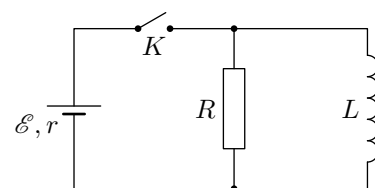


1) Найдите ток в катушке непосредственно перед размыканием ключа.

2) Какой заряд протёк через резистор после размыкания ключа?

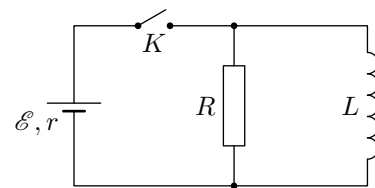
$$\frac{q}{T} = \frac{q_0}{T} \quad \text{or} \quad \frac{q}{T} = \frac{q_0}{T} \quad \text{or} \quad I = I$$

ЗАДАЧА 8. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора сопротивлением  $R = 2r$  (см. рисунок). Ключ  $K$  замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через источник равен  $\mathcal{E}/(2r)$ . Какой заряд протечёт через резистор после размыкания ключа? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



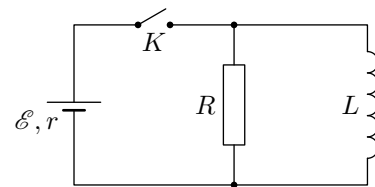
$$\frac{q}{T} = \frac{q_0}{T}$$

ЗАДАЧА 9. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора сопротивлением  $R = 4r$  (см. рисунок). Ключ  $K$  замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через резистор равен  $\mathcal{E}/(6r)$ . Какой заряд протечёт через катушку после размыкания ключа? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



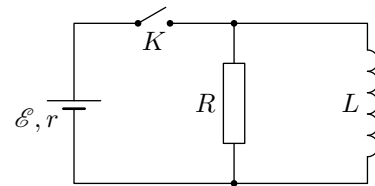
$$\frac{q}{T} = \frac{q_0}{T}$$

ЗАДАЧА 10. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора сопротивлением  $R = 3r$  (см. рисунок). Ключ  $K$  замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через источник равен  $\mathcal{E}/(2r)$ . Какой заряд протёк через резистор при замкнутом ключе? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



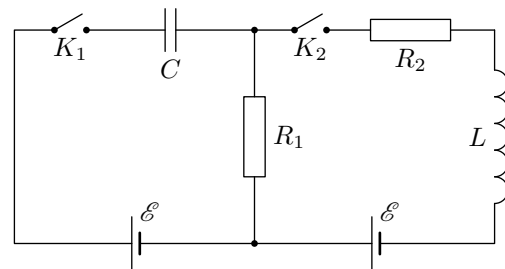
$$\frac{q}{T} = \frac{q_0}{T}$$

Задача 11. («Физтех», 2010) Электрическая цепь состоит из батарейки с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , катушки индуктивностью  $L$  и резистора сопротивлением  $R = 6r$  (см. рисунок). Ключ  $K$  замыкают, а затем размыкают в момент, когда ток через резистор равен  $\mathcal{E}/(9r)$ . Какой заряд протёк через резистор при замкнутом ключе? До замыкания ключа ток в цепи отсутствовал.



$$\frac{\tau L \mathcal{E}}{\mathcal{E}^2} = \tau b$$

Задача 12. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Сначала замыкают ключ  $K_1$ , и, когда напряжение на конденсаторе достигает значения  $U_0 = \mathcal{E}/2$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определить:

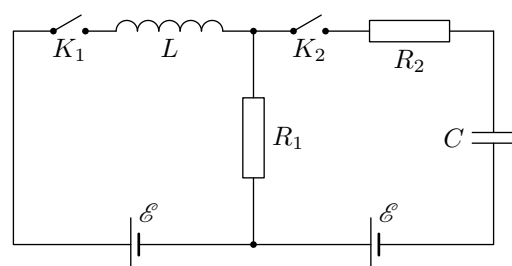


- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа  $K_2$ ;
- 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.

Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.

$$\frac{\mathcal{E} U_0 + R_1}{\mathcal{E} (2R_1 + R_2)} = \tau \Omega \quad (\tau; \frac{\tau}{\mathcal{E}} = \tau \Omega \text{ (т)})$$

Задача 13. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Вначале замыкают ключ  $K_1$ . Когда ток через катушку индуктивности достигает значения  $I_0$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определить:



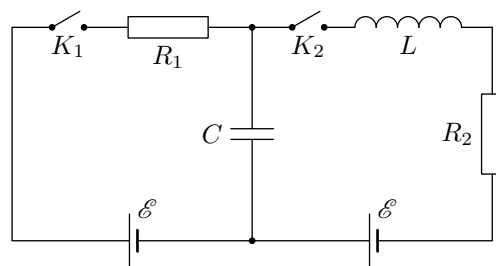
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа  $K_2$ ;
- 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.

Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.

$$\mathcal{E} \tau = \tau \Omega \quad (\tau; \frac{\mathcal{E} U_0 + R_1}{\mathcal{E} (2R_1 + R_2)} = \tau \Omega \text{ (т)})$$

Задача 14. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Сначала замыкают ключ  $K_1$ . Когда напряжение на конденсаторе достигает величины  $U_0 = \mathcal{E}/2$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определить:

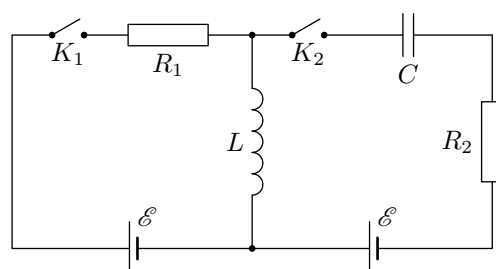
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа  $K_2$ ;
  - 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.
- Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)\mathcal{E}} = \mathcal{C}\Omega \quad (\mathcal{C} : \mathcal{E} = \tau\Omega \text{ (I)})$$

Задача 15. (МФТИ, 1998) В электрической схеме, параметры которой указаны на рисунке, в начальный момент ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Вначале замыкают ключ  $K_1$ . Когда ток через катушку индуктивности достигает значения  $I_0$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определить:

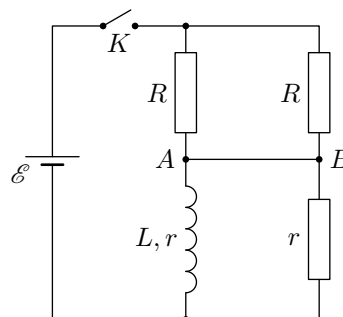
- 1) напряжение на катушке индуктивности сразу после замыкания ключа  $K_2$ ;
  - 2) напряжение на конденсаторе в установившемся режиме.
- Внутреннее сопротивление батарей не учитывать.



$$\mathcal{E} = \mathcal{C}\Omega \quad (\mathcal{C} : \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2} = \tau\Omega \text{ (I)})$$

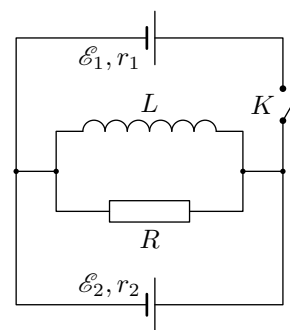
Задача 16. (МФТИ, 2001) В схеме, изображённой на рисунке, в начальный момент ключ  $K$  разомкнут. Катушка с индуктивностью  $L$  обладает омическим сопротивлением  $r$ . Какой заряд протечёт через перемычку  $AB$  после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением перемычки пренебречь. Параметры схемы указаны на рисунке.

$$\frac{\mathcal{E}L}{2r(R+r)} = \mathcal{Q}$$



Задача 17. (МФТИ, 1993) В схеме, изображённой на рисунке, в начальный момент ключ  $K$  разомкнут, а в замкнутом контуре схемы течёт установившийся ток. Определить величину и направление тока через резистор  $R$  сразу после замыкания ключа  $K$ . Параметры схемы:  $\mathcal{E}_1 = 10$  В, внутреннее сопротивление  $r_1 = 5$  Ом, внутреннее сопротивление второй батареи  $r_2 = 20$  Ом, сопротивление резистора  $R = 4$  Ом.

$$I_R = \frac{\mathcal{E}_1 r_1 + (\mathcal{E}_2 + r_2)R}{\mathcal{E}_1 r_1 + (\mathcal{E}_2 + r_2)(R+r)} = \mathcal{I}$$

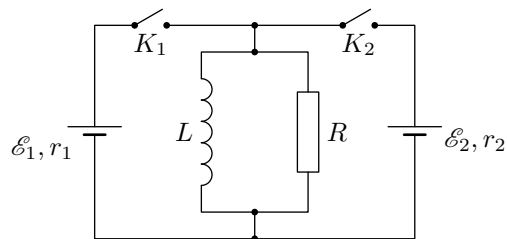


Задача 18. (МФТИ, 2005) В электрической схеме, представленной на рисунке, ключи  $K_1$  и  $K_2$  разомкнуты. Ключ  $K_1$  замыкают, и после того, как через резистор с сопротивлением  $R$  протёк заряд  $q_0$ , замыкают ключ  $K_2$ .

1) Найти напряжение на катушке индуктивностью  $L$  непосредственно перед замыканием ключа  $K_2$ .

2) Найти дополнительный заряд, протекший через резистор после замыкания ключа  $K_2$ .

ЭДС батарей  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  и их внутренние сопротивления  $r_1$  и  $r_2$  известны.



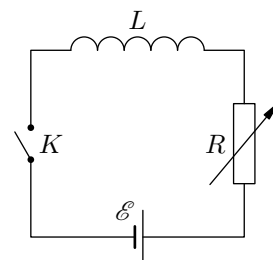
$$\left( \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{I_0}{r_1} \right) \frac{R}{L} = b \nabla \left( \frac{I}{R} - I_0 \right) \frac{r_1 + R}{R} = \tau \Omega \quad (1)$$

Задача 19. (МФТИ, 1997) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$ , катушки индуктивности  $L$  и переменного сопротивления, начальное значение которого равно  $R_0$  (см. рисунок). Через некоторое время после замыкания ключа  $K$  напряжение на катушке равно  $U_0$ . Начиная с этого момента времени сопротивление  $R$  меняется таким образом, что напряжение на катушке остаётся постоянным и равным  $U_0$ .

1) Определить напряжение на катушке сразу после замыкания ключа  $K$ .

2) Найти зависимость сопротивления от времени.

Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.



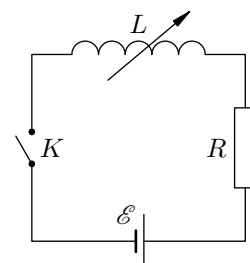
$$\left( \frac{I}{R} - \frac{U_0}{\Omega} + I \right) \Omega = (I) \Omega \quad (\tau : \mathcal{E} = \tau \Omega \quad (1)$$

Задача 20. (МФТИ, 1997) Электрическая цепь состоит из батареи с ЭДС  $\mathcal{E}$ , сопротивления  $R$  и катушки переменной индуктивности, начальное значение которой равно  $L_0$  (см. рисунок). Через некоторое время после замыкания ключа  $K$  на катушке падает напряжение  $U_0$ . Начиная с этого момента времени индуктивность катушки изменяется таким образом, что напряжение на катушке остаётся постоянным и равным  $U_0$ .

1) Определить напряжение на катушке сразу после замыкания ключа  $K$ .

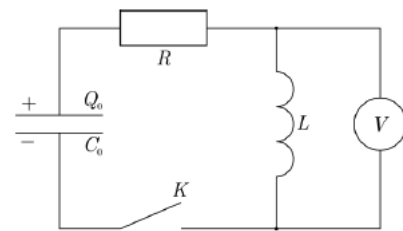
2) Найти зависимость индуктивности катушки от времени.

Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.



$$\frac{U_0}{\Omega} + I = (I) \Omega \quad (\tau : \mathcal{E} = \tau \Omega \quad (1)$$

ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 2016, регион, 11) В электрической цепи (см. рисунок), состоящей из резистора сопротивлением  $R$ , катушки индуктивностью  $L$ , на конденсаторе ёмкостью  $C_0$  находится заряд  $Q_0$ . В некоторый момент времени замыкают ключ  $K$  и одновременно начинают изменять ёмкость конденсатора так, что идеальный вольтметр показывает постоянное напряжение.



1) Как зависит от времени ёмкость конденсатора  $C(t)$  при изменении  $t$  от 0 до  $t_1 = \sqrt{C_0 L}$ ?

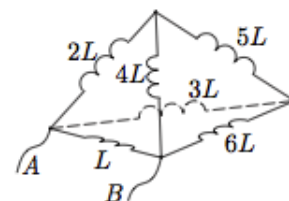
2) Какую работу за время  $t_1$  совершили внешние силы? Считайте, что  $t_1 = L/R = \sqrt{C_0 L}$ .

**Подсказка.** Количество теплоты, выделившейся на резисторе за время  $t_1$ , равно

$$W_R = \int_0^{t_1} I^2(t) R dt = \frac{Q_0^2}{3C_0}.$$

$$\frac{0 \text{ Дж}}{0 \text{ Дж}} = V \left( z : \frac{7}{7} + 1 \right) 0 \text{ Дж} = (1) \text{ Дж} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2014, регион, 11) Шесть идеальных катушек индуктивности соединили в электрическую цепь так, что катушки образовали рёбра тетраэдра (см. рисунок). К вершинам  $A$  и  $B$  подсоединили последовательно соединённые резистор сопротивлением  $R = 100$  Ом, батарейку с ЭДС  $\mathcal{E} = 4,6$  В, миллиамперметр и ключ. Индуктивность катушки  $L = 1$  мГн. Взаимной индуктивностью катушек пренебречь.

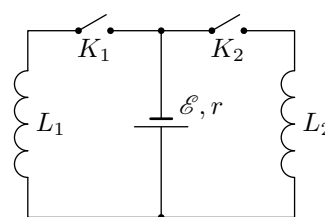


1) Вычислите силу тока  $I_{60}$ , протекающего через миллиамперметр спустя 1 минуту после замыкания ключа.

2) Вычислите силу тока, протекающего через каждую из катушек в тот момент, когда сила тока, протекающего через миллиамперметр, равна  $I_A = 23$  мА.

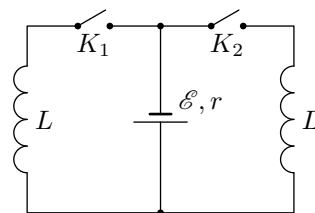
$$0 = 9I, \text{ в м } z = 9I = 3 \text{ мА}, I_3 = 4I = 18 \text{ мА}, I_2 = 2I = 46 \text{ мА}, I_1 = 23 \text{ мА} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 23. (МФТИ, 1981) Две катушки индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  подключены через ключи  $K_1$  и  $K_2$  к источнику с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  (см. рисунок). В начальный момент оба ключа разомкнуты. После того как ключ  $K_1$  замкнули и сила тока через катушку индуктивностью  $L_1$  достигла некоторого значения  $I_0$ , замыкают ключ  $K_2$ . Определите установившиеся силы тока через катушки индуктивностями  $L_1$  и  $L_2$  после замыкания ключа  $K_2$ . Сопротивления катушек пренебречь.



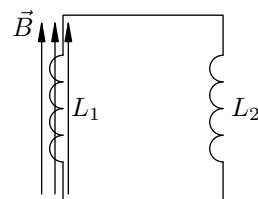
$$\frac{z \tau + 1 \tau}{0 I - 1 / \tau} = z I, \quad \frac{z \tau + 1 \tau}{0 I + \tau + 1 / \tau} = 1 I$$

ЗАДАЧА 24. (МФТИ, 1981) Две катушки одинаковой индуктивностью  $L$  подключены через ключи  $K_1$  и  $K_2$  к источнику с постоянной ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  (см. рисунок). В начальный момент ключи разомкнуты. Затем замыкают ключ  $K_1$ . Определите силу тока, протекающего через ключ  $K_1$  перед замыканием ключа  $K_2$ , если известно, что установившаяся сила тока через ключ  $K_1$  после замыкания ключа  $K_2$  в два раза больше установившейся силы тока через ключ  $K_2$ . Сопротивлениями катушек пренебречь.



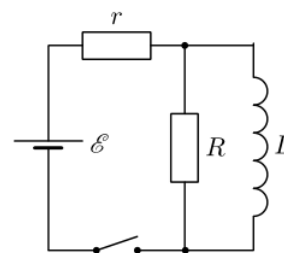
$$\frac{\mathcal{E}}{r} = 0I$$

ЗАДАЧА 25. (МФТИ, 1982) Катушка из  $n_1$  витков, площадь каждого из которых равна  $S$ , расположена в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , которая направлена перпендикулярно виткам катушки. Вне поля расположена вторая катушка (см. рисунок). Обе катушки соединены проводниками. Пренебрегая омическим сопротивлением катушек и проводников, определить величину тока, возникающего в катушках после выключения поля. Индуктивности катушек равны  $L_1$  и  $L_2$ .



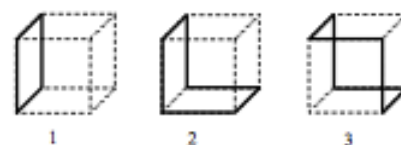
$$\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{R} = I$$

ЗАДАЧА 26. («Физтех», 2014) В схеме, изображённой на рисунке,  $\mathcal{E} = 7 \text{ В}$ ,  $R = 6r$ . После замыкания ключа происходит процесс установления режима постоянного тока. Найдите напряжение на катушке в момент, когда скорость изменения её энергии была максимальной.



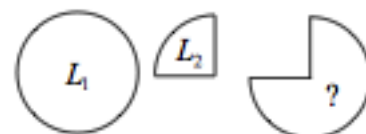
$$U = \frac{\mathcal{E}}{3} = 0$$

ЗАДАЧА 27. («Росатом», 2011, 11) Виток тонкого провода, изогнутого вдоль четырёх рёбер куба (рис. 1), обладает индуктивностью  $L_1$ . Виток провода, изогнутого вдоль шести рёбер того же куба так, как показано на рис. 2, обладает индуктивностью  $L_2$ . Найти индуктивность витка провода, изогнутого вдоль шести рёбер того же куба так, как показано на рис. 3.



$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\mathcal{E} = \mathcal{I}$$

ЗАДАЧА 28. («Росатом», 2011, 11) Индуктивность кольца известна и равна  $L_1$ . Индуктивность контура, представляющего собой сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол  $\pi/2$ , также известна и равна  $L_2$ . Найти индуктивность контура, представляющего сектор кольца того же радиуса, опирающийся на угол  $3\pi/2$ .



$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{I}} = \mathcal{I}$$