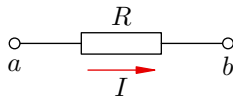
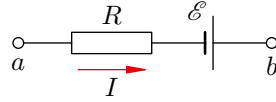


## Правила Кирхгофа

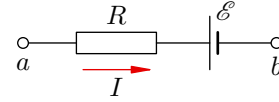
В статье «ЭДС. Закон Ома для полной цепи» мы вывели закон Ома для неоднородного участка цепи (то есть участка, содержащего источник тока):  $\varphi_a - \varphi_b \pm \mathcal{E} = IR$ . На рисунке проиллюстрированы различные варианты применения закона Ома.



$$\varphi_a - \varphi_b = IR$$



$$\varphi_a - \varphi_b + \mathcal{E} = IR$$



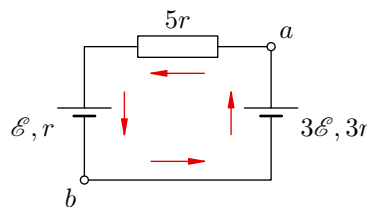
$$\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E} = IR$$

Чтобы правильно пользоваться законом Ома при решении задач, нужно чётко следовать следующим инструкциям.

- Направление тока на рисунке указывается стрелкой. В некоторых ситуациях заранее не известно, куда именно течёт ток. Поэтому стрелку тока можно направить *произвольно* («будем считать, что ток течёт сюда»). Если мы угадали, то сила тока после вычислений окажется положительной, а если не угадали — отрицательной.
- Точки  $a$  и  $b$  идут *по направлению тока*: сначала  $a$ , потом  $b$ . Иными словами, в законе Ома из потенциала *начальной* точки участка вычитается потенциал *конечной* точки.
- В законе Ома ЭДС стоит с плюсом, если в направлении стрелки источник проходится от «минуса» к «плюсу» (источник «помогает» току, рис. в центре); если же источник проходится от «плюса» к «минусу» (источник «мешает» току, рис. справа), то ЭДС стоит с минусом.

В качестве примера применения закона Ома для неоднородного участка разберём следующую простую задачу.

**ЗАДАЧА.** Два источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и  $3\mathcal{E}$  и внутренними сопротивлениями соответственно  $r$  и  $3r$  включены в цепь последовательно (соединены одноимённые клеммы источников). Последовательно с источниками подключён резистор сопротивлением  $5r$  (см. рисунок). Найдите силу тока в цепи и разность потенциалов между точками  $a$  и  $b$ .



**РЕШЕНИЕ.** Направление тока выберем по часовой стрелке (в данном случае понятно, что ток потечёт именно так, поскольку источник  $3\mathcal{E}$  «перевесит»). Для участка  $a \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow b$  имеем:

$$\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E} = 6Ir \quad (1)$$

(сопротивление данного участка равно  $6r$ ). Аналогично, для участка  $b \rightarrow 3\mathcal{E} \rightarrow a$ :

$$\varphi_b - \varphi_a + 3\mathcal{E} = 3Ir. \quad (2)$$

Сложим уравнения (1) и (2):

$$2\mathcal{E} = 9Ir, \quad (3)$$

откуда искомая сила тока:

$$I = \frac{2\mathcal{E}}{9r}.$$

Подставляя это выражение в (1), находим разность потенциалов:

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{7\mathcal{E}}{3}.$$

Задача решена.

Обратите внимание на равенство (3), которое получилось сложением (1) и (2). Справа стоит произведение силы тока  $I$  на суммарное сопротивление цепи  $9r$ . Слева стоит алгебраическая сумма ЭДС ( $3\mathcal{E} - \mathcal{E} = 2\mathcal{E}$ ). Потенциалы сократились, поскольку контур замкнутый.

Подобную процедуру — сложение двух или более выражений закона Ома для различных участков замкнутого контура (с попарным сокращением всех потенциалов) — можно проделать для любого замкнутого контура любой цепи, и результат получится аналогичный. Он известен как *второе правило Кирхгофа*.

**Второе правило Кирхгофа.** Пусть имеется замкнутый контур, состоящий из источников тока с ЭДС  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$  и резисторов  $R_1, R_2, \dots, R_n$  (в число этих резисторов могут быть включены также и внутренние сопротивления источников). Через резисторы текут соответственно токи  $I_1, I_2, \dots, I_n$  (вообще говоря, различные).

Обозначим направления всех токов стрелками. Стрелки направляем произвольным образом, не задумываясь о том, куда в действительности текут токи. Если при дальнейших вычислениях ток  $I_k$  окажется положительным, то он течёт в направлении соответствующей стрелки, а если отрицательным — то в противоположном направлении.

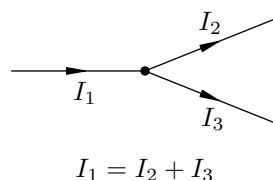
Будем обходить контур в определённом фиксированном направлении (неважно, по часовой стрелке или против). Если стрелка тока  $I_k$  совпадает с направлением обхода, то перед  $I_k$  в нижеследующей формуле (4) ставится плюс; если же стрелка тока  $I_k$  противоположна направлению обхода, то перед  $I_k$  ставится минус. Если источник с ЭДС  $\mathcal{E}_k$  проходится от «минуса» к «плюсу», то перед  $\mathcal{E}_k$  в (4) ставится плюс, а если источник проходится от «плюса» к «минусу», то перед  $\mathcal{E}_k$  ставится минус. В итоге оказывается, что алгебраическая сумма напряжений на всех резисторах равна алгебраической сумме всех ЭДС:

$$\pm I_1 R_1 \pm I_2 R_2 + \dots + \pm I_n R_n = \pm \mathcal{E}_1 + \pm \mathcal{E}_2 + \dots + \pm \mathcal{E}_m. \quad (4)$$

Что же касается первого правила Кирхгофа, то оно совсем простое и является следствием закона сохранения заряда. В точке разветвления проводов заряды не накапливаются, поэтому сколько заряда входит в такую точку за секунду — столько же заряда и выходит за секунду из этой точки.

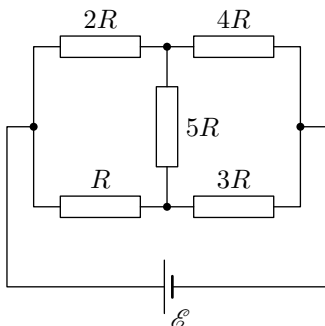
**Первое правило Кирхгофа.** Сумма токов, вытекающих в точку разветвления проводов, равна сумме токов, вытекающих из этой точки.

Простейший случай использования первого правила Кирхгофа изображён на рисунке.

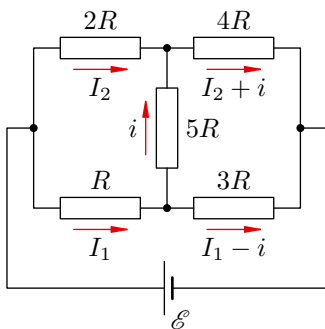


Если в задаче не спрашивается про разность потенциалов, то второе правило Кирхгофа быстрее приводит к цели (поскольку потенциалы из него уже исключены).

**ЗАДАЧА.** В схеме, изображённой на рисунке, найдите ток через резистор сопротивлением  $5R$ . Величины  $\mathcal{E}$  и  $R$  известны. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.



**РЕШЕНИЕ.** Расставим стрелки токов с учётом первого правила Кирхгофа (см. рисунок).



Берём контур  $\mathcal{E} \rightarrow R \rightarrow 3R \rightarrow \mathcal{E}$  и обходим его по часовой стрелке:

$$I_1 R + (I_1 - i) \cdot 3R = \mathcal{E}. \tag{5}$$

Контур  $R \rightarrow 5R \rightarrow 2R \rightarrow R$  обходим против часовой стрелки:

$$I_1 R + i \cdot 5R - I_2 \cdot 2R = 0. \tag{6}$$

Контур  $5R \rightarrow 4R \rightarrow 3R \rightarrow 5R$  обойдём по часовой стрелке:

$$i \cdot 5R + (I_2 + i) \cdot 4R - (I_1 - i) \cdot 3R = 0. \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) дают систему:

$$\begin{cases} 2I_2 - I_1 = 5i, \\ 3I_1 - 4I_2 = 12i. \end{cases}$$

Отсюда легко находим  $I_1 = 22i$ . Подставляя это в (5), получаем

$$i = \frac{\mathcal{E}}{85R}.$$

Величина  $i$  получилась положительной. Это значит, что стрелка тока  $i$ , которую мы направили вверх, совпадает с истинным направлением тока<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>В данном случае истинное направление тока  $i$  легко предвидеть. Удалим мысленно резистор  $5R$ . Тогда сопротивление нижней ветви будет равно  $4R$ , а верхней —  $6R$ , и поэтому сила тока в нижней ветви окажется больше. Значит, когда мы вернём перемычку  $5R$  на место, ток через неё потечёт снизу вверх.

ЗАДАЧА 1. Два источника постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  ( $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$ ) и внутренними сопротивлениями соответственно  $r_1, r_2$  включены в цепь последовательно так, что друг с другом соединены одноимённые клеммы.

- 1) Найдите силу тока в цепи.
- 2) Какое напряжение покажет идеальный вольтметр, подключённый к клеммам одного из источников?

$$\frac{\mathcal{E}_1 + r_1}{r_1 \mathcal{E}_2 + r_1 r_2} = \Omega \quad (\mathcal{E}_2 : \frac{\mathcal{E}_1 + r_1}{r_2 - r_1} = I \text{ (I)})$$

ЗАДАЧА 2. Два источника с ЭДС  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$  и внутренними сопротивлениями соответственно  $r_1, r_2$  включены в цепь последовательно так, что друг с другом соединены разноимённые клеммы.

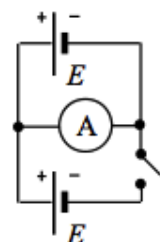
- 1) Найдите силу тока в цепи.
- 2) Какое (по модулю) напряжение покажет идеальный вольтметр, подключённый к клеммам одного из источников?

$$\frac{\mathcal{E}_1 + r_1}{|r_1 \mathcal{E}_2 - r_1 r_2|} = \Omega \quad (\mathcal{E}_2 : \frac{\mathcal{E}_1 + r_1}{r_2 + r_1} = I \text{ (I)})$$

ЗАДАЧА 3. Два источника тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и  $2\mathcal{E}$  и внутренними сопротивлениями соответственно  $r$  и  $3r$  соединены последовательно. При каком внешнем сопротивлении цепи  $R$  напряжение на зажимах одного из источников будет равно нулю?

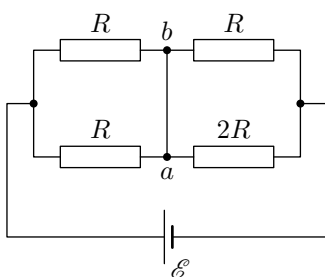
$$R/r = \mathcal{Y}$$

ЗАДАЧА 4. (Всеросс., 2018, ШЭ, 11) В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, при разомкнутом ключе через амперметр протекает ток силой  $I_1 = 0,5$  А, а при замкнутом ключе — силой  $I_2 = 0,8$  А. Определите напряжение между контактами разомкнутого ключа. ЭДС каждого источника  $E = 2,0$  В, их внутренние сопротивления одинаковы.



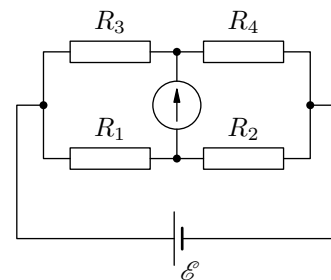
$$U = 2Er \frac{I_1}{I_2 - I_1} = 1,5 \text{ В}$$

ЗАДАЧА 5. Найдите силу тока через перемычку  $ab$  в схеме, изображённой на рисунке. Сопротивлениями перемычки, подводящих проводов и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



$$\frac{\mathcal{Y} \mathcal{E}}{\mathcal{E}} = I$$

ЗАДАЧА 6. (Мостик Уитстона) Схема мостика Уитстона, приведённая на рисунке, часто применяется для нахождения неизвестного сопротивления. При каком соотношении между резисторами  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$  схема сбалансирована, то есть ток через гальванометр равен нулю?

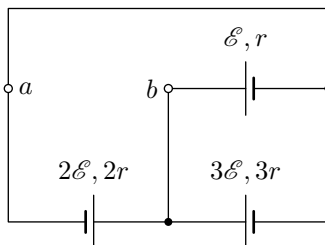


$$\frac{R_3}{R_1} = \frac{R_4}{R_2}$$

ЗАДАЧА 7. Через аккумулятор в конце зарядки течёт ток, сила которого равна  $I_1 = 4$  А. При этом напряжение на его клеммах  $U_1 = 12,8$  В. При разрядке того же аккумулятора при силе тока  $I_2 = 6$  А напряжение на его клеммах  $U_2 = 11,1$  В. Найдите силу тока короткого замыкания.

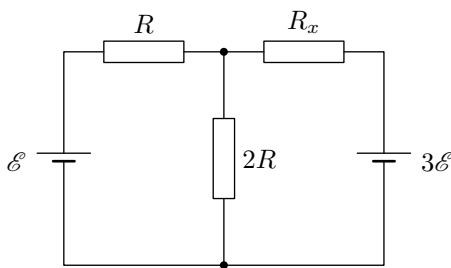
$$\forall \varepsilon, I_2 = \frac{\varepsilon_0 - I_1 r}{r} = 0$$

ЗАДАЧА 8. Определите разность потенциалов между точками  $a$  и  $b$  в схеме, изображённой на рисунке. Параметры схемы указаны.



$$\frac{U}{\varepsilon} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

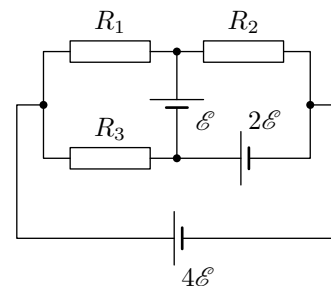
ЗАДАЧА 9. При каком сопротивлении  $R_x$  ток через резистор  $R$  равен нулю? Параметры цепи указаны на схеме (см. рисунок).



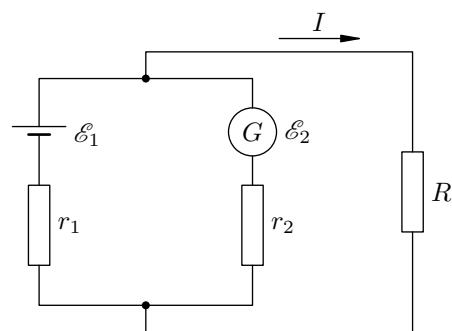
$$R_x = 4R$$

ЗАДАЧА 10. В цепи, схема которой приведена на рисунке, сопротивления всех резисторов одинаковы:  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ . Определите значения и направления токов, протекающих по каждому резистору. Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R}, I_2 = \frac{\varepsilon}{2R}, I_3 = \frac{\varepsilon}{2R}; \text{ все — слева направо}$$



ЗАДАЧА 11. Источниками электрического тока в системах электрического оборудования автомобилей являются генератор постоянного тока и соединённый параллельно с ним аккумулятор (см. рисунок). ЭДС генератора  $\mathcal{E}_2 = 14$  В, его внутреннее сопротивление  $r_2 = 0,05$  Ом. ЭДС аккумулятора  $\mathcal{E}_1 = 12$  В. Определите силу тока  $I$ , потребляемого нагрузкой, при которой аккумулятор начнёт разряжаться.



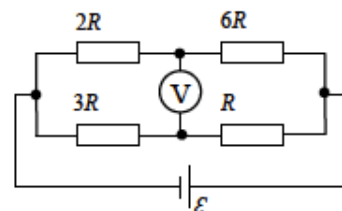
$$V \text{ 89' 1} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 - \mathcal{E}_2} < I$$

ЗАДАЧА 12. От генератора с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 12$  В и внутренним сопротивлением  $r_1 = 0,2$  Ом заряжается аккумулятор с ЭДС  $\mathcal{E}_2 = 10$  В и внутренним сопротивлением  $r_2 = 0,6$  Ом. Параллельно аккумулятору включена лампочка сопротивлением  $R = 3$  Ом. Определите силы тока  $I$  и  $i$  в лампочке и аккумуляторе.

$$V \text{ 89' 1} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 - \mathcal{E}_2} = ? ; V \text{ 89' 2} = \frac{\mathcal{E}_2 I_2 + (\mathcal{E}_1 + I_1) r_1}{r_1 \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 r_1} = I$$

ЗАДАЧА 13. (МОШ, 2017, 11) Найдите показания идеального вольтметра в схеме на рисунке, если ЭДС идеального источника  $\mathcal{E} = 70$  В. Какими станут показания вольтметра, если его поменять местами с источником?

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathcal{E} = 35 \text{ В}; V_2 = \frac{35}{16} \mathcal{E} = 32 \text{ В}$$

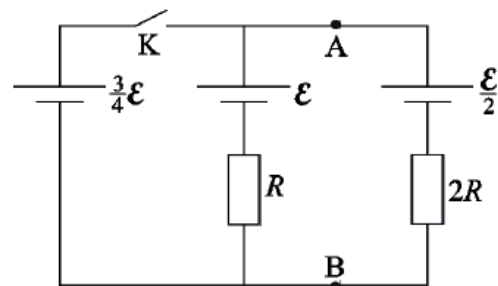


ЗАДАЧА 14. («Физтех», 2016, 11) В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны.

1) Найти ток через ключ **К** с указанием направления после замыкания ключа.

2) Найти отношение напряжений между точками **А** и **В** после и до замыкания ключа.

$$\frac{01}{6} = \frac{I_1}{I_2} \text{ (з'овягнен); } \frac{48}{8} = I \text{ (1)}$$

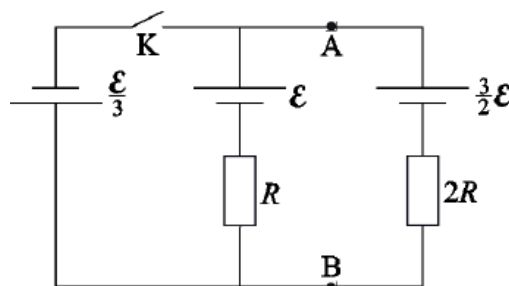


ЗАДАЧА 15. («Физтех», 2016, 11) В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны.

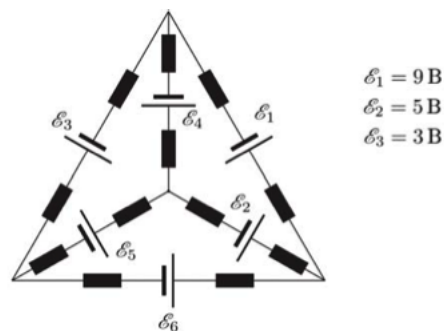
1) Найти ток через ключ **К** с указанием направления после замыкания ключа.

2) Найти отношение напряжений между точками **А** и **В** после и до замыкания ключа.

$$\frac{1}{2} = \frac{I_1}{I_2} \text{ (з'овягнен); } \frac{48}{6} = I \text{ (1)}$$



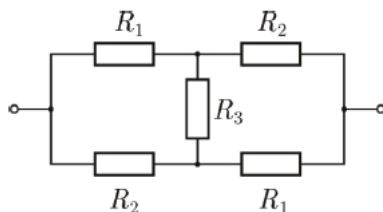
ЗАДАЧА 16. (Всеросс., 2014, ШЭ, 11) Экспериментатор собрал электрическую цепь, состоящую из разных батареек с пренебрежимо малыми внутренними сопротивлениями и одинаковых плавких предохранителей, и нарисовал её схему (предохранители на схеме обозначены чёрными прямоугольниками). При этом он забыл указать на рисунке часть ЭДС батареек. Однако экспериментатор помнит, что в тот день при проведении опыта все предохранители остались целыми. Восстановите неизвестные значения ЭДС.



$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 9 \text{ В} \\ \varepsilon_2 &= 5 \text{ В} \\ \varepsilon_3 &= 3 \text{ В} \end{aligned}$$

$$\boxed{\varepsilon_4 = 4 \text{ В}, \varepsilon_5 = 1 \text{ В}, \varepsilon_6 = 6 \text{ В}}$$

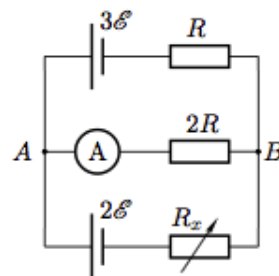
ЗАДАЧА 17. (Всеросс., 2016, МЭ, 11) Найдите сопротивление электрической цепи, схема которой изображена на рисунке.  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 30 \text{ Ом}$ .



$$\boxed{R = \frac{2R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1 + R_2 + 2R_3} \approx 14,4 \text{ Ом}}$$

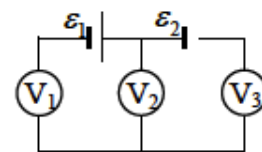
ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 2011, РЭ, 11) В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, ЭДС батареек равны  $3\varepsilon$  и  $2\varepsilon$ , сопротивления резисторов составляют  $R_1 = R$  и  $R_2 = 2R$ , а  $R_x = 3R$ .

На сколько процентов изменится сила тока, проходящего через амперметр, если сопротивление переменного резистора  $R_x$  увеличить на 5%?



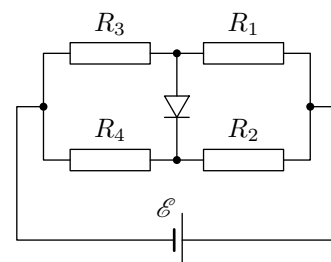
Не изменится

ЗАДАЧА 19. («Росатом», 2017, 11) Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, собрана из двух разных источников и трёх одинаковых вольтметров. ЭДС правого источника известна и равна  $\varepsilon_2 = 10 \text{ В}$ , правый вольтметр показывает напряжение  $U_3 = 12 \text{ В}$ . Найти показания двух остальных вольтметров и ЭДС левого источника. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.



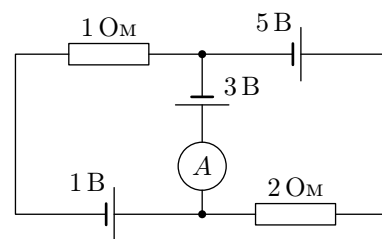
$$\boxed{U_1 = 2U_3 - \varepsilon_2 = 14 \text{ В}, U_2 = \varepsilon_2 - U_3 = 2 \text{ В}, \varepsilon_1 = 2U_3 - 2\varepsilon_2 = 16 \text{ В}}$$

ЗАДАЧА 20. (МФТИ, 2006) При каких значениях сопротивления резистора  $R_3$  идеальный диод в схеме, изображённой на рисунке, будет открыт, если  $R_1 = 1 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 4 \text{ Ом}$ ? Чему будет равен ток через диод при  $R_3 = 3 \text{ Ом}$ , если ЭДС батареи  $\varepsilon = 20 \text{ В}$ , а её внутренним сопротивлением можно пренебречь?



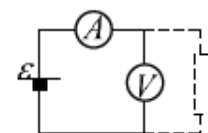
$$\boxed{\text{Диод открыт при } R_3 > 2 \text{ Ом}; i = 0,8 \text{ А}}$$

Задача 21. (МФТИ, 2006) В схеме на рисунке все элементы можно считать идеальными. Значения ЭДС источников и сопротивлений резисторов на схеме указаны. Определите величину и направление тока через амперметр.



$$\boxed{\text{(сила)} \quad \nabla I = I}$$

Задача 22. («Росатом», 2018, 10–11) К батарее с ЭДС  $\mathcal{E}$  и неизвестным внутренним сопротивлением подключены последовательно амперметр и вольтметр с некоторыми неизвестными внутренними сопротивлениями. Если параллельно вольтметру включить некоторое сопротивление, то показания амперметра увеличатся в 2 раза, вольтметра — в 2 раза уменьшатся. Найти показания вольтметра до включения в цепь сопротивления.

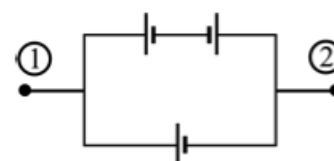


$$\boxed{\mathcal{E} = \Omega}$$

Задача 23. («Росатом», 2018, 11) Амперметр подключают к источнику, имеющему некоторое внутреннее сопротивление, и он показывает силу тока  $I_1 = 1$  А. Если параллельно первому амперметру подключить второй, точно такой же, то сумма показаний амперметров будет равна  $I_2 = 1,2$  А. Найти сумму показаний 8 точно таких же амперметров, подключённых к этому же источнику параллельно.

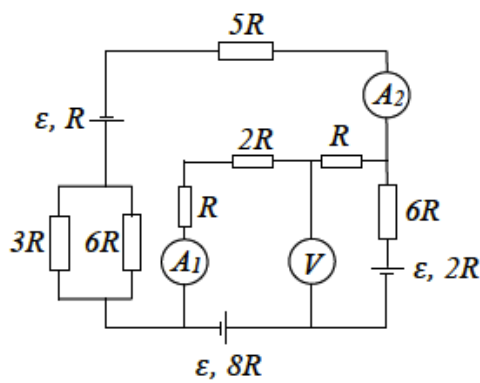
$$\boxed{\nabla I' I = \frac{\mathcal{E} I - I I}{\mathcal{E} I' I'} = \mathcal{E} I}$$

Задача 24. (МОШ, 2011, 10) Из трёх одинаковых батареек собрали цепь, схема которой изображена на рисунке. Что покажет вольтметр, подключённый к выводам 1 и 2? ЭДС каждой из батареек равна  $\mathcal{E}$ .



$$\boxed{\mathcal{E} / \mathcal{E} = 1}$$

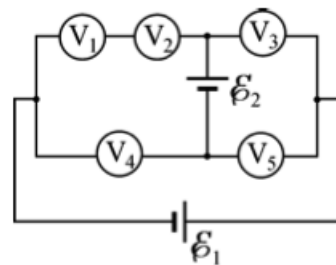
Задача 25. (МОШ, 2016, 11) В схеме, изображённой на рисунке, определить показания амперметров и вольтметра. Приборы считать идеальными.



$$\boxed{0 = \Omega \cdot \frac{48}{\mathcal{E}} = \mathcal{E} I' 0 = I I}$$



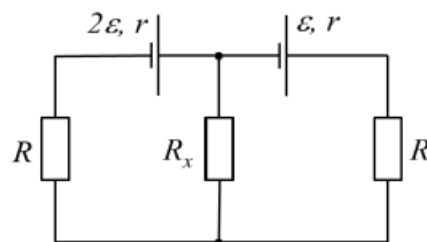
Задача 26. (МОШ, 2012, 11) Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из двух батареек с ЭДС  $\mathcal{E}_1 = 5$  В и  $\mathcal{E}_2 = 2$  В и пяти одинаковых вольтметров. Найдите показания каждого из вольтметров. Сопротивления батареек много меньше сопротивлений вольтметров.



$$U_3 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \frac{r}{R+r} = 2 \text{ В}, U_4 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \frac{r}{R+r} = 3 \text{ В}$$

$$U_1 = U_2 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \frac{r}{R+r} = 2 \text{ В}, U_5 = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \frac{r}{R+r} = 1 \text{ В}$$

Задача 27. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Разветвлённая электрическая цепь состоит из двух источников ЭДС с одинаковыми внутренними сопротивлениями  $r$  и трёх сопротивлений нагрузки (см. рисунок). ЭДС одного источника в два раза больше ЭДС другого. Какой должна быть величина сопротивления  $R_x$ , чтобы на нём выделялась мощность, равная  $\frac{\mathcal{E}^2}{64r}$  при минимальной (из возможных) величине силы тока через это сопротивление? Сопротивления нагрузки в боковых ветвях схемы равны  $R = 5r$ .



$$R_x = 9r$$

Задача 28. (Всеросс., 1997, ОЭ, 11) В электрическую цепь (рис.) включено устройство  $P$  с неизвестной электрической схемой. Параметры цепи:  $\mathcal{E}_1 = 20$  В,  $\mathcal{E}_2 = 10$  В,  $r_1 = 2$  Ом,  $r_2 = 1$  Ом,  $R_1 = 8$  Ом,  $R_2 = 9$  Ом. При подсоединении к клеммам  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  идеальных вольтметров они показали одинаковое напряжение. Чему оно равно?

$$34 \text{ В или } \frac{34}{3} \text{ В}$$

