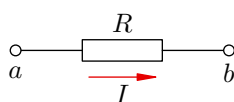
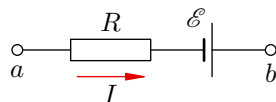


Правила Кирхгофа

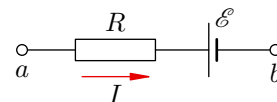
В статье «ЭДС. Закон Ома для полной цепи» мы вывели закон Ома для неоднородного участка цепи (то есть участка, содержащего источник тока): $\varphi_a - \varphi_b \pm \mathcal{E} = IR$. На рисунке проиллюстрированы различные варианты применения закона Ома.



$$\varphi_a - \varphi_b = IR$$



$$\varphi_a - \varphi_b + \mathcal{E} = IR$$



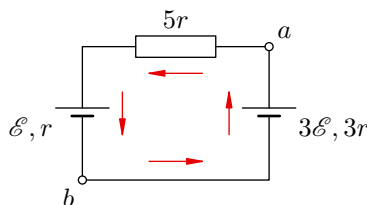
$$\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E} = IR$$

Чтобы правильно пользоваться законом Ома при решении задач, нужно чётко следовать следующим инструкциям.

- Направление тока на рисунке указывается стрелкой. В некоторых ситуациях заранее не известно, куда именно течёт ток. Поэтому стрелку тока можно направить *произвольно* («будем считать, что ток течёт сюда»). Если мы угадали, то сила тока после вычислений окажется положительной, а если не угадали — отрицательной.
- Точки a и b идут *по направлению тока*: сначала a , потом b . Иными словами, в законе Ома из потенциала *начальной* точки участка вычитается потенциал *конечной* точки.
- В законе Ома ЭДС стоит с плюсом, если в направлении стрелки источник проходится от «минуса» к «плюсу» (источник «помогает» току, рис. в центре); если же источник проходится от «плюса» к «минусу» (источник «мешает» току, рис. справа), то ЭДС стоит с минусом.

В качестве примера применения закона Ома для неоднородного участка разберём следующую простую задачу.

ЗАДАЧА. Два источника тока с ЭДС \mathcal{E} и $3\mathcal{E}$ и внутренними сопротивлениями соответственно r и $3r$ включены в цепь последовательно (соединены одноимённые клеммы источников). Последовательно с источниками подключён резистор сопротивлением $5r$ (см. рисунок). Найдите силу тока в цепи и разность потенциалов между точками a и b .



РЕШЕНИЕ. Направление тока выберем по часовой стрелке (в данном случае понятно, что ток потечёт именно так, поскольку источник $3\mathcal{E}$ «перевесит»). Для участка $a \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow b$ имеем:

$$\varphi_a - \varphi_b - \mathcal{E} = 6Ir \quad (1)$$

(сопротивление данного участка равно $6r$). Аналогично, для участка $b \rightarrow 3\mathcal{E} \rightarrow a$:

$$\varphi_b - \varphi_a + 3\mathcal{E} = 3Ir. \quad (2)$$

Сложим уравнения (1) и (2):

$$2\mathcal{E} = 9Ir, \quad (3)$$

откуда искомая сила тока:

$$I = \frac{2\mathcal{E}}{9r}.$$

Подставляя это выражение в (1), находим разность потенциалов:

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{7\mathcal{E}}{3}.$$

Задача решена.

Обратите внимание на равенство (3), которое получилось сложением (1) и (2). Справа стоит произведение силы тока I на суммарное сопротивление цепи $9r$. Слева стоит алгебраическая сумма ЭДС ($3\mathcal{E} - \mathcal{E} = 2\mathcal{E}$). Потенциалы сократились, поскольку контур замкнутый.

Подобную процедуру — сложение двух или более выражений закона Ома для различных участков замкнутого контура (с попарным сокращением всех потенциалов) — можно проделать для любого замкнутого контура любой цепи, и результат получится аналогичный. Он известен как *второе правило Кирхгофа*.

Второе правило Кирхгофа. Пусть имеется замкнутый контур, состоящий из источников тока с ЭДС $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m$ и резисторов R_1, R_2, \dots, R_n (в число этих резисторов могут быть включены также и внутренние сопротивления источников). Через резисторы текут соответственно токи I_1, I_2, \dots, I_n (вообще говоря, различные).

Обозначим направления всех токов стрелками. Стрелки направляем произвольным образом, не задумываясь о том, куда в действительности текут токи. Если при дальнейших вычислениях ток I_k окажется положительным, то он течёт в направлении соответствующей стрелки, а если отрицательным — то в противоположном направлении.

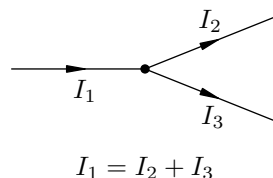
Будем обходить контур в определённом фиксированном направлении (неважно, по часовой стрелке или против). Если стрелка тока I_k совпадает с направлением обхода, то перед I_k в нижеследующей формуле (4) ставится плюс; если же стрелка тока I_k противоположна направлению обхода, то перед I_k ставится минус. Если источник с ЭДС \mathcal{E}_k проходится от «минуса» к «плюсу», то перед \mathcal{E}_k в (4) ставится плюс, а если источник проходится от «плюса» к «минусу», то перед \mathcal{E}_k ставится минус. В итоге оказывается, что алгебраическая сумма напряжений на всех резисторах равна алгебраической сумме всех ЭДС:

$$\pm I_1 R_1 \pm I_2 R_2 + \dots + \pm I_n R_n = \pm \mathcal{E}_1 + \pm \mathcal{E}_2 + \dots + \pm \mathcal{E}_m. \quad (4)$$

Что же касается первого правила Кирхгофа, то оно совсем простое и является следствием закона сохранения заряда. В точке разветвления проводов заряды не накапливаются, поэтому сколько заряда входит в такую точку за секунду — столько же заряда и выходит за секунду из этой точки.

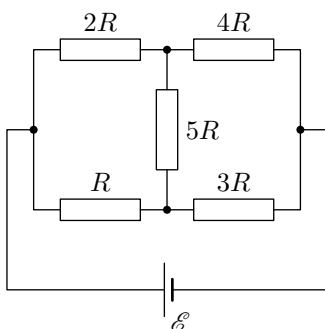
Первое правило Кирхгофа. Сумма токов, вытекающих в точку разветвления проводов, равна сумме токов, вытекающих из этой точки.

Простейший случай использования первого правила Кирхгофа изображён на рисунке.

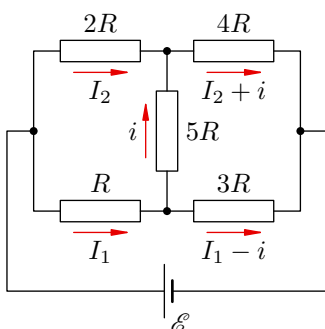


Если в задаче не спрашивается про разность потенциалов, то второе правило Кирхгофа быстрее приводит к цели (поскольку потенциалы из него уже исключены).

ЗАДАЧА. В схеме, изображённой на рисунке, найдите ток через резистор сопротивлением $5R$. Величины \mathcal{E} и R известны. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.



РЕШЕНИЕ. Расставим стрелки токов с учётом первого правила Кирхгофа (см. рисунок).



Берём контур $\mathcal{E} \rightarrow R \rightarrow 3R \rightarrow \mathcal{E}$ и обходим его по часовой стрелке:

$$I_1 R + (I_1 - i) \cdot 3R = \mathcal{E}. \tag{5}$$

Контур $R \rightarrow 5R \rightarrow 2R \rightarrow R$ обходим против часовой стрелки:

$$I_1 R + i \cdot 5R - I_2 \cdot 2R = 0. \tag{6}$$

Контур $5R \rightarrow 4R \rightarrow 3R \rightarrow 5R$ обойдём по часовой стрелке:

$$i \cdot 5R + (I_2 + i) \cdot 4R - (I_1 - i) \cdot 3R = 0. \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) дают систему:

$$\begin{cases} 2I_2 - I_1 = 5i, \\ 3I_1 - 4I_2 = 12i. \end{cases}$$

Отсюда легко находим $I_1 = 22i$. Подставляя это в (5), получаем

$$i = \frac{\mathcal{E}}{85R}.$$

Величина i получилась положительной. Это значит, что стрелка тока i , которую мы направили вверх, совпадает с истинным направлением тока¹.

¹В данном случае истинное направление тока i легко предвидеть. Удалим мысленно резистор $5R$. Тогда сопротивление нижней ветви будет равно $4R$, а верхней — $6R$, и поэтому сила тока в нижней ветви окажется больше. Значит, когда мы вернём перемычку $5R$ на место, ток через неё потечёт снизу вверх.

ЗАДАЧА 1. Два источника постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ ($\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$) и внутренними сопротивлениями соответственно r_1, r_2 включены в цепь последовательно так, что друг с другом соединены одноимённые клеммы.

- 1) Найдите силу тока в цепи.
- 2) Какое напряжение покажет идеальный вольтметр, подключённый к клеммам одного из источников?

$$\frac{\mathcal{E}_1 + r_1}{r_1 \mathcal{E}_2 + r_1 r_2} = \Omega \quad (\mathcal{E}_1 : \frac{\mathcal{E}_1 + r_1}{\mathcal{E}_2 - r_2} = I \quad (1))$$

ЗАДАЧА 2. Два источника с ЭДС $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ и внутренними сопротивлениями соответственно r_1, r_2 включены в цепь последовательно так, что друг с другом соединены разноимённые клеммы.

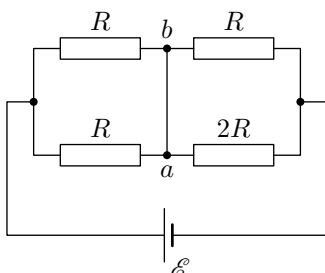
- 1) Найдите силу тока в цепи.
- 2) Какое (по модулю) напряжение покажет идеальный вольтметр, подключённый к клеммам одного из источников?

$$\frac{\mathcal{E}_1 + r_1}{|r_1 \mathcal{E}_2 - r_1 r_2|} = \Omega \quad (\mathcal{E}_1 : \frac{\mathcal{E}_1 + r_1}{\mathcal{E}_2 + r_2} = I \quad (1))$$

ЗАДАЧА 3. Два источника тока с ЭДС \mathcal{E} и $2\mathcal{E}$ и внутренними сопротивлениями соответственно r и $3r$ соединены последовательно. При каком внешнем сопротивлении цепи R напряжение на зажимах одного из источников будет равно нулю?

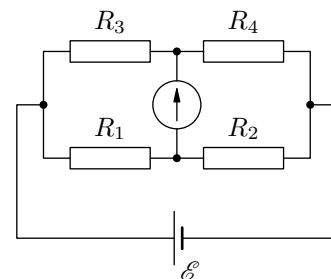
$$r/r = \mathcal{E}$$

ЗАДАЧА 4. Найдите силу тока через перемычку ab в схеме, изображённой на рисунке. Сопротивлениями перемычки, подводящих проводов и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



$$\frac{\mathcal{E}L}{\mathcal{E}} = I$$

ЗАДАЧА 5. (Мостик Уитстона) Схема мостика Уитстона, приведённая на рисунке, часто применяется для нахождения неизвестного сопротивления. При каком соотношении между резисторами R_1, R_2, R_3 и R_4 схема сбалансирована, то есть ток через гальванометр равен нулю?

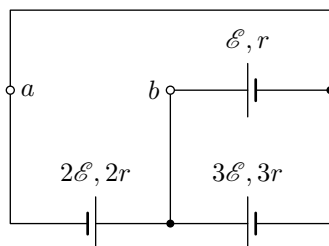


$$\frac{r_{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}} = \frac{r_{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}}$$

ЗАДАЧА 6. Через аккумулятор в конце зарядки течёт ток, сила которого равна $I_1 = 4$ А. При этом напряжение на его клеммах $U_1 = 12,8$ В. При разрядке того же аккумулятора при силе тока $I_2 = 6$ А напряжение на его клеммах $U_2 = 11,1$ В. Найдите силу тока короткого замыкания.

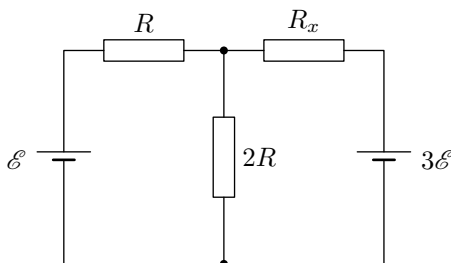
$$\forall \mathcal{E} : \mathcal{E}L = \frac{\mathcal{E}_0 - r_0}{r_0 \mathcal{E}_I + r_0 r_I} = 0I$$

ЗАДАЧА 7. Определите разность потенциалов между точками a и b в схеме, изображённой на рисунке. Параметры схемы указаны.



$$\frac{11}{81} = \varphi - \psi$$

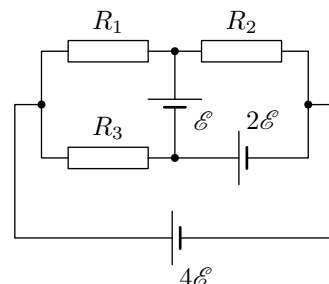
ЗАДАЧА 8. При каком сопротивлении R_x ток через резистор R равен нулю? Параметры цепи указаны на схеме (см. рисунок).



$$R_x = 4R$$

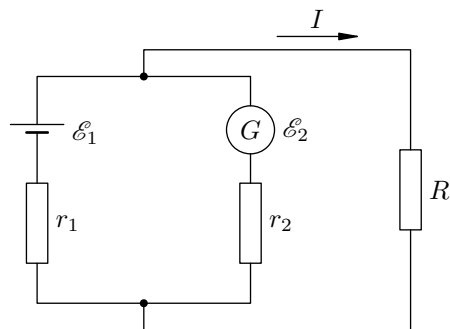
ЗАДАЧА 9. В цепи, схема которой приведена на рисунке, сопротивления всех резисторов одинаковы: $R_1 = R_2 = R_3 = R$. Определите значения и направления токов, протекающих по каждому резистору. Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

$$I_1 = \frac{\epsilon}{2R}, I_2 = \frac{\epsilon}{3R}, I_3 = \frac{\epsilon}{2R}; \text{ все — слева направо}$$



ЗАДАЧА 10. Источниками электрического тока в системах электрического оборудования автомобилей являются генератор постоянного тока и соединённый параллельно с ним аккумулятор (см. рисунок). ЭДС генератора $\mathcal{E}_2 = 14$ В, его внутреннее сопротивление $r_2 = 0,05$ Ом. ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}_1 = 12$ В. Определите силу тока I , потребляемого нагрузкой, при которой аккумулятор начнёт разряжаться.

$$I > 40 \text{ A} = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2 - \mathcal{E}_1}$$

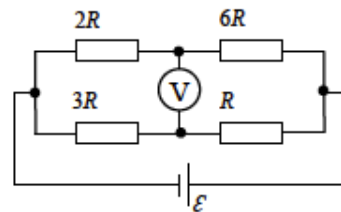


ЗАДАЧА 11. От генератора с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0,2$ Ом заряжается аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E}_2 = 10$ В и внутренним сопротивлением $r_2 = 0,6$ Ом. Параллельно аккумулятору включена лампочка сопротивлением $R = 3$ Ом. Определите силы тока I и i в лампочке и аккумуляторе.

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 (r_1 + r_2) + R r_1 r_2}{R r_1 + \mathcal{E}_2 r_2 + \mathcal{E}_1 r_1} = 1,58 \text{ A}; i = 3,65 \text{ A}; \text{ все — вправо}$$

Задача 12. (МФО, 2017, 11) Найдите показания идеального вольтметра в схеме на рисунке, если ЭДС идеального источника $\mathcal{E} = 70$ В. Какими станут показания вольтметра, если его поменять местами с источником?

$$U_V = \mathcal{E} \frac{3R}{9R} = \frac{2}{3} \mathcal{E}; \text{ в } \mathcal{E} \mathcal{E} = \mathcal{E} \frac{2}{1} = 2\mathcal{E}$$

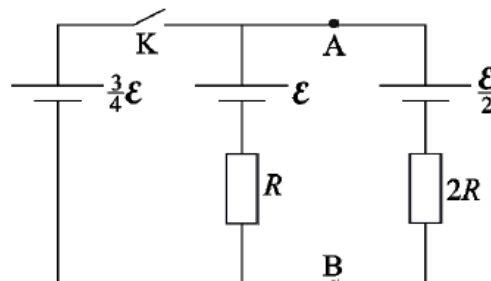


Задача 13. («Физтех», 2016, 11) В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны.

1) Найти ток через ключ **К** с указанием направления после замыкания ключа.

2) Найти отношение напряжений между точками **А** и **В** после и до замыкания ключа.

$$\frac{0I}{6} = \frac{I_0}{2} \quad (2) \text{ ; ответ: } \frac{4\mathcal{E}}{9} = I \quad (1)$$

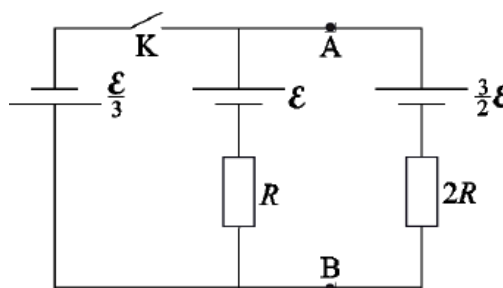


Задача 14. («Физтех», 2016, 11) В электрической цепи, схема которой показана на рисунке, все элементы идеальные, их параметры указаны.

1) Найти ток через ключ **К** с указанием направления после замыкания ключа.

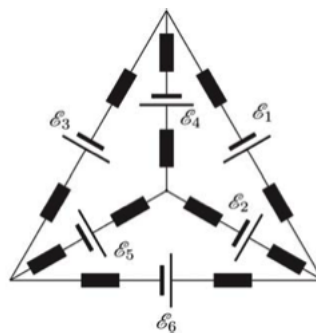
2) Найти отношение напряжений между точками **А** и **В** после и до замыкания ключа.

$$\frac{I}{2} = \frac{I_0}{2} \quad (2) \text{ ; ответ: } \frac{4\mathcal{E}}{9} = I \quad (1)$$



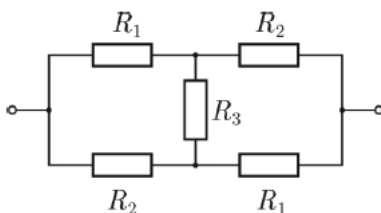
Задача 15. (Всеросс., 2014, ШЭ, 11) Экспериментатор собрал электрическую цепь, состоящую из разных батареек с пренебрежимо малыми внутренними сопротивлениями и одинаковых плавких предохранителей, и нарисовал её схему (предохранители на схеме обозначены чёрными прямоугольниками). При этом он забыл указать на рисунке часть ЭДС батареек. Однако экспериментатор помнит, что в тот день при проведении опыта все предохранители остались целыми. Восстановите неизвестные значения ЭДС.

$$\mathcal{E}_4 = 4 \text{ В}, \mathcal{E}_5 = 1 \text{ В}, \mathcal{E}_6 = 6 \text{ В}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= 9 \text{ В} \\ \mathcal{E}_2 &= 5 \text{ В} \\ \mathcal{E}_3 &= 3 \text{ В} \end{aligned}$$

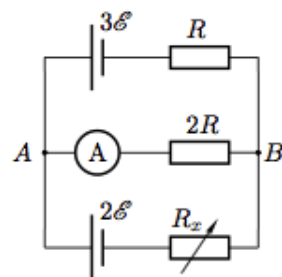
ЗАДАЧА 16. (Всеросс., 2016, МЭ, 11) Найдите сопротивление электрической цепи, схема которой изображена на рисунке. $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$.



$$R = \frac{2R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1 + R_2 + 2R_3} \approx 14,4 \text{ Ом}$$

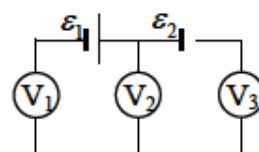
ЗАДАЧА 17. (Всеросс., 2011, РЭ, 11) В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, ЭДС батареек равны $3\mathcal{E}$ и $2\mathcal{E}$, сопротивления резисторов составляют $R_1 = R$ и $R_2 = 2R$, а $R_x = 3R$.

На сколько процентов изменится сила тока, проходящего через амперметр, если сопротивление переменного резистора R_x увеличить на 5%?



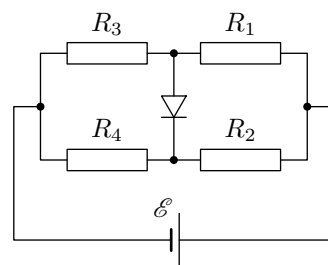
Не изменится

ЗАДАЧА 18. («Росатом», 2017, 11) Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, собрана из двух разных источников и трёх одинаковых вольтметров. ЭДС правого источника известна и равна $\mathcal{E}_2 = 10 \text{ В}$, правый вольтметр показывает напряжение $U_3 = 12 \text{ В}$. Найти показания двух остальных вольтметров и ЭДС левого источника. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.



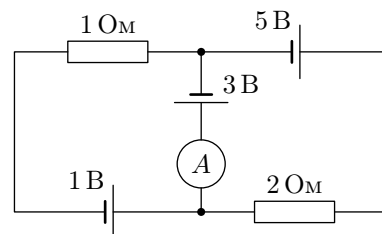
$$U_1 = 2U_3 - \mathcal{E}_2 = 14 \text{ В}, U_2 = \mathcal{E}_2 - U_3 = 2 \text{ В}, \mathcal{E}_1 = 3U_3 - 2\mathcal{E}_2 = 16 \text{ В}$$

ЗАДАЧА 19. (МФТИ, 2006) При каких значениях сопротивления резистора R_3 идеальный диод в схеме, изображённой на рисунке, будет открыт, если $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_4 = 4 \text{ Ом}$? Чему будет равен ток через диод при $R_3 = 3 \text{ Ом}$, если ЭДС батареи $\mathcal{E} = 20 \text{ В}$, а её внутренним сопротивлением можно пренебречь?



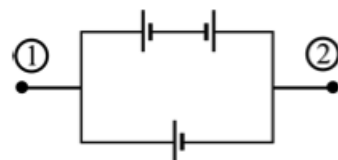
$$\text{Диод открыт при } R_3 < 2 \text{ Ом}; i = 0,8 \text{ А}$$

ЗАДАЧА 20. (МФТИ, 2006) В схеме на рисунке все элементы можно считать идеальными. Значения ЭДС источников и сопротивлений резисторов на схеме указаны. Определите величину и направление тока через амперметр.



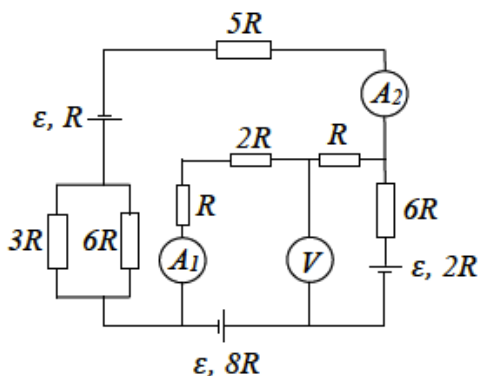
$$I = 1 \text{ А (вниз)}$$

ЗАДАЧА 21. (МФО, 2011, 10) Из трёх одинаковых батареек собрали цепь, схема которой изображена на рисунке. Что покажет вольтметр, подключённый к выводам 1 и 2? ЭДС каждой из батареек равна \mathcal{E} .



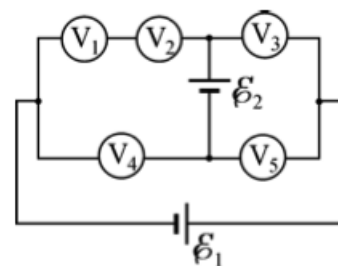
$$\mathcal{E}/3r = 1$$

ЗАДАЧА 22. (МФО, 2016, 11) В схеме, изображённой на рисунке, определить показания амперметров и вольтметра. Приборы считать идеальными.



$$0 = \Omega \cdot \frac{4R}{3} = \mathcal{E}_1 \cdot 0 = \mathcal{E}_2$$

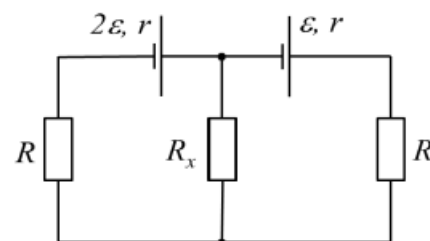
ЗАДАЧА 23. (МФО, 2012, 11) Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из двух батареек с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 5$ В и $\mathcal{E}_2 = 2$ В и пяти одинаковых вольтметров. Найдите показания каждого из вольтметров. Сопротивления батареек много меньше сопротивлений вольтметров.



$$U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = \mathcal{E}_1 = 5 \text{ В}$$

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_4 = U_5 = \mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$$

ЗАДАЧА 24. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Разветвлённая электрическая цепь состоит из двух источников ЭДС с одинаковыми внутренними сопротивлениями r и трёх сопротивлений нагрузки (см. рисунок). ЭДС одного источника в два раза больше ЭДС другого. Какой должна быть величина сопротивления R_x , чтобы на нём выделялась мощность, равная $\frac{\mathcal{E}^2}{64r}$ при минимальной (из возможных) величине силы тока через это сопротивление? Сопротивления нагрузки в боковых ветвях схемы равны $R = 5r$.



$$R_x = 9r$$