

## Баллистика. Относительность

В задачах, где рассматривается относительное движение двух брошенных камней, бывает полезно переходить в систему отсчёта, связанную с одним из камней. Она движется относительно земли с ускорением свободного падения  $\vec{g}$ , и потому движение второго камня в этой системе отсчёта будет *равномерным и прямолинейным*.

**ЗАДАЧА 1.** Два камня брошены одновременно: один — с высоты  $h$  вертикально вниз со скоростью  $u$ , другой — с поверхности земли вертикально вверх со скоростью  $v$ . Через какое время камни окажутся на одной высоте над землёй? Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$\frac{a+n}{4} = t$$

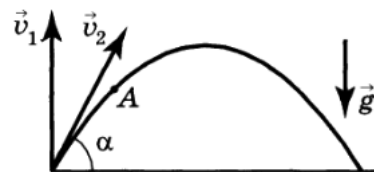
**ЗАДАЧА 2.** («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) Тяжёлую гирию отпускают без начальной скорости с некоторой высоты. Одновременно с земли брошен камешек. Куда в начальный момент должна быть направлена скорость камня (если она достаточна по величине), чтобы камень попал в гирию во время падения? Сопротивление воздуха отсутствует.

$$\text{Напр. н}$$

**ЗАДАЧА 3.** («Физтех», 2014, 9–11) Два камня бросили одновременно из одной точки под углами  $20^\circ$  и  $80^\circ$  к горизонту с одинаковыми скоростями  $v_0 = 15$  м/с. Найдите расстояние между камнями через  $\tau = 1$  секунду. Ответ выразить в метрах. Если ответ не целый, то округлить до сотых. Ускорение свободного падения равно  $10$  м/с<sup>2</sup>. Сопротивление воздуха не учитывать.

$$n \text{ м} = 10a$$

**ЗАДАЧА 4.** (Всеросс., 1998, ОЭ, 9) Одновременно из одной точки брошены два тела с одинаковыми по модулю скоростями  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v_0$ : первое — вертикально вверх, второе — под углом  $\alpha$  к горизонту (см. рисунок). В дальнейшем они двигались поступательно. Определите скорость второго тела относительно первого в момент времени, когда второе тело будет находиться в точке  $A$ , достигнув половины своей максимальной высоты полёта. Сопротивлением воздуха пренебречь.



$$\left(\frac{v}{v_0} - \cos 2\alpha\right) \sin 2\alpha = \frac{v_0}{g}$$

**ЗАДАЧА 5.** («Росатом», 2012, 11) Из точки, находящейся над землёй, одновременно бросили два тела: одно вертикально вверх с начальной скоростью  $v_0$ , второе — горизонтально с начальной скоростью  $2v_0$ . Найти расстояние между телами в тот момент, когда первое тело поднялось на максимальную высоту над поверхностью земли. Второе тело в этот момент времени ещё не успело упасть на землю.

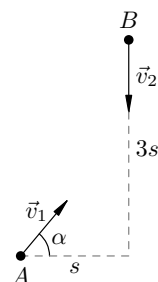
$$\frac{b}{g \sqrt{v_0^2}} = s$$

ЗАДАЧА 6. (МОШ, 2016, 11) Ракета удаляется от поверхности Земли с постоянной скоростью  $v_0 = 200$  м/с, направленной строго вертикально. Из неподвижного орудия под углом  $\alpha$  к горизонту выпускается снаряд с такой же по величине начальной скоростью  $v_0$ . В каком диапазоне должен лежать угол  $\alpha$  чтобы в системе отсчёта, движущейся поступательно вместе со снарядом, скорости ракеты и орудия хотя бы в какой-то момент времени были взаимно перпендикулярны? Через какое время  $\tau$  это произойдёт? Сопротивлением воздуха пренебречь. Поверхность Земли считать плоской.

$$\left(\frac{v_0}{g} - v_0 \cos \alpha\right) \frac{g}{v_0} = \pm \sqrt{v_0^2 - g^2} > v_0 \gg \frac{g}{v_0}$$

ЗАДАЧА 7. («Физтех», 2009) Снежки  $A$  и  $B$ , отстоящие друг от друга по горизонтали на  $s$  и по вертикали на  $3s$ , бросают одновременно со скоростями  $v_1 = 5$  м/с под углом  $\alpha$  ( $\cos \alpha = 4/5$ ) к горизонту вверх и  $v_2$  вертикально вниз (см. рисунок). Через некоторое время снежки столкнулись. Найти  $v_2$ .

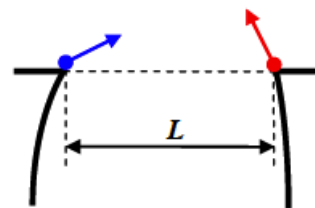
$$v_2 = (v_1 \cos \alpha - v_1 \sin \alpha) \tan \alpha = v_1 \tan^2 \alpha$$



ЗАДАЧА 8. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Однажды Галилео Галилей бросал камешки с Пизанской башни. Один из камешков он бросил горизонтально со скоростью  $u = 11$  м/с из точки, находящейся на высоте  $H = 51$  м над поверхностью земли. Камешек полетел в направлении мальчика, стоящего на расстоянии  $L = 68$  м от башни. В то же мгновение этот мальчик бросил свой камешек с помощью пращи со скоростью  $v = 26$  м/с, причём вектор этой скорости был направлен на точку вылета камня Галилея. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдите, каким будет минимальное расстояние между камешками в процессе полёта.

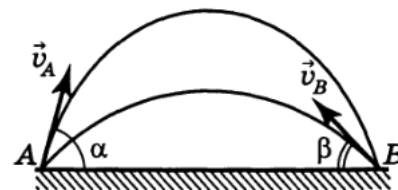
$$v \cos \alpha \approx p \sqrt{\frac{2H + v^2 \tau^2}{g}} = v \cos \alpha \sqrt{\frac{v^2 \sin^2 \alpha \tau^2 + 2H + v^2 \tau^2}{g}} = p$$

ЗАДАЧА 9. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) С двух сторон оврага шириной  $L = 20$  м одновременно брошены два небольших камня. Начальные скорости камней одинаковы и направлены перпендикулярно друг другу, точки бросания находятся на одной горизонтали. Оказалось, что скорости камней вновь оказались перпендикулярны друг другу точно в тот момент времени, когда расстояние между ними было минимально. Найти величину начальной скорости камней. Ускорение свободного падения  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>, сопротивлением воздуха пренебречь.



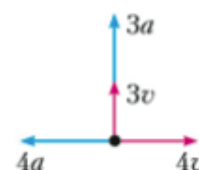
$$v \cos \theta = \frac{v}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 1999, ОЭ, 9) Из точек  $A$  и  $B$ , находящихся на одной горизонтальной прямой, одновременно бросили два камня с одинаковыми по модулю скоростями  $v_0 = 20$  м/с. Один из них полетел по навесной траектории, а другой — по настильной, и каждый упал в точку старта другого камня. Известно, что угол бросания  $\alpha$  камня из точки  $A$  составляет  $75^\circ$  (см. рисунок). Через какое время после бросания расстояние между камнями станет минимальным? Чему равно это расстояние? Укажите на рисунке положения камней в этот момент.



$$t_{\min} = \frac{v_0}{g} = \frac{20}{10} = 2 \text{ с} \quad \Rightarrow \quad L_{\min} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{400}{10} = 40 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 11. (Всеросс., 2013, финал, 9) Две частицы начали движение из одной точки во взаимно перпендикулярных направлениях (рис.). Первая — с начальной скоростью  $3v$  и постоянным ускорением  $3a$ , сонаправленным с начальной скоростью, другая — со скоростью  $4v$  и постоянным ускорением  $4a$ , направленным противоположно начальной скорости.



Численно  $a = 0,538$  м/с<sup>2</sup>,  $v = 10$  м/с.

Каким будет расстояние  $L$  между частицами в момент, когда их относительная скорость по модулю опять станет равна начальной относительной скорости? Чему будет равна минимальная относительная скорость  $v_{\text{отн}}$  частиц?

$$L_{\min} = \frac{v_0^2}{g} = \frac{1250}{2} \approx 625 \text{ м}, \quad v_{\text{отн}} \approx \frac{1250}{2} = 625 \text{ м/с}$$

ЗАДАЧА 12. (Всеросс., 2014, финал, 10) Игрушечная катапульта может стрелять сразу двумя шариками, выпуская их с одинаковыми по модулю начальными скоростями  $v_0$ , но направленными под разными углами к горизонту. Угол, под которым запускается один из шариков, можно менять как угодно. Конструкция катаapultы такова, что после выстрела с горизонтальной плоскости оба шарика попадают в одну и ту же точку этой плоскости. После большого числа испытаний выяснилось, что максимальное из возможных расстояний между шариками в то время, пока они оба находились в воздухе, достигало  $L = 19$  м. Определите начальную скорость  $v_0$  шариков. Примите  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 19}{2}} = \sqrt{95} \approx 9,75 \text{ м/с}$$