Движение тел с переменной массой

Говоря о *движении тел с переменной массой*, обычно имеют в виду задачи о движении тележки, в которую насыпается песок или из которой высыпается песок, о реактивном движении космической ракеты (за счёт вытекающей газовой струи) и другие, им подобные задачи. В рассматриваемых ситуациях масса интересующего нас тела может как уменьшаться (песок высыпается, топливо расходуется), так и увеличиваться (песок насыпается, на ракету налипает космическая пыль). Для простоты изложения мы изучим эти случаи отдельно, а затем объединим их одной формулой — уравнением Мещерского.

В основе описания движения тел с переменной массой лежит факт, известный вам из листков «Импульс» и «Системы материальных точек», а именно — скорость изменения импульса системы есть равнодействующая приложенных к системе внешних сил[1]:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

или

$$d\vec{p} = \vec{F}dt. \tag{1}$$

Первый случай: масса прибавляется. Пусть тело массы m движется со скоростью $\vec{v}$, а другое тело очень малой массы δm движется со скоростью $\vec{w}$. За время dt тела слипаются, и образовавшееся тело массы $m + \delta m$ движется со скоростью $\vec{v} + d\vec{v}$. Изменение импульса системы:

$$d\vec{p} = (m + \delta m)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} + \delta m \cdot \vec{w}) = md\vec{v} - (\vec{w} - \vec{v})\delta m + \delta m \cdot d\vec{v}.$$

Последним слагаемым $\delta m \cdot d\vec{v}$ можно пренебречь — как малой величиной второго порядка по сравнению с остальными величинами первого порядка малости. Заметим также, что $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ есть относительная скорость второго тела, то есть скорость тела δm относительно тела m до взаимодействия. Таким образом,

$$d\vec{p} = md\vec{v} - \vec{u}\delta m.$$

Подставляем это в (1):

$$md\vec{v} - \vec{u}\delta m = \vec{F}dt,$$

или

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\,\frac{\delta m}{dt}\,. \tag{2}$$

Второй случай: масса убывает. Будем для определённости говорить о реактивном движении ракеты (которое происходит за счёт испускания газовой струи — продуктов сгорания топлива). Пусть ракета массы m движется со скоростью $\vec{v}$ и за время dt испускает порцию газовой струи массой δm; скорость этой порции струи в неподвижной системе отсчёта равна $\vec{w}$, а относительно ракеты она равна $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$. После испускания данной порции струи ракета приобретает скорость $\vec{v} + d\vec{v}$. Изменение импульса системы «ракета + струя»:

$$d\vec{p} = \big((m - \delta m)(\vec{v} + d\vec{v}) + \delta m \cdot \vec{w}\big) - m\vec{v} = md\vec{v} + (\vec{w} - \vec{v})\delta m = md\vec{v} + \vec{u}\delta m.$$

Подставляем это в (1):

$$md\vec{v} + \vec{u}\delta m = \vec{F}dt,$$

[1] Как правило, в качестве внешней силы выступает сила тяжести, сила трения или сила сопротивления среды.

или

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\,\frac{\delta m}{dt}\,. \tag{3}$$

Теперь сопоставим формулы (2) и (3): они отличаются только знаком перед δm. Если масса прибавляется, то стоит знак плюс, а если убывает — то минус. Это позволяет объединить обе данные формулы в одну, введя обычный дифференциал dm:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\,\frac{dm}{dt} \tag{4}$$

(прибавлению массы отвечает случай $dm > 0$, уходу массы — $dm < 0$). Соотношение (4) называется *уравнением Мещерского* и служит основным инструментом описания движения тел с переменной массой.

Задача 1. Цилиндрическая ракета с работающим двигателем упёрлась своим передним торцом в неподвижную стену. Газовая струя вытекает со скоростью u, массовый расход топлива равен μ. Найдите силу давления ракеты на стену. Силой тяжести пренебречь.

$\boxed{F = \mu u}$

Задача 2. (*Савченко, 2.2.36*) Ракета массы m зависла над поверхностью Земли. Сколько топлива в единицу времени она должна расходовать при этом, если скорость истечения газа u? Как изменится результат, если ракета поднимается с ускорением a?

$\boxed{\mu_0 = \frac{mg}{u};\ \mu = \frac{m(g+a)}{u}}$

Задача 3. (*«Физтех», 2018, 10*) Ракета стартует вертикально. К $t_1 = 30$ секунде полёта вес выводимого на орбиту спутника увеличился в $k_1 = 1{,}5$ раза (относительно веса перед стартом), к $t_2 = 60$ секунде полёта вес спутника был уже в $k_2 = 2{,}0$ раза больше, чем перед стартом. Считать массовый расход топлива постоянным. Сопротивлением воздуха и изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь. Принять $g = 10$ м/с^2.

1) Найти ускорение ракеты в момент времени t_1.

2) Определите скорость u вытекания продуктов сгорания относительно сопла, считая её постоянной.

$\boxed{1)\ a_1 = (k_1 - 1)g = 5\ \text{м/с}^2;\ 2)\ u = \frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} g(t_2 - t_1) = 1800\ \text{м/с}}$

Задача 4. (*Савченко, 2.2.38*) Водомётный катер движется в спокойной воде. Сила сопротивления воды движению катера $f = kv^2$. Скорость выбрасываемой воды относительно катера u. Определите установившуюся скорость катера, если сечение потока захваченной двигателем воды S, плотность воды ρ.

$\boxed{v = \frac{\rho S u}{\rho S + k}}$

Задача 5. (*Савченко, 2.2.42*) С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v? Масса змеи m, её длина l.

$\boxed{F = m\left(g + \frac{v^2}{l}\right)}$

Задача 6. (*МОШ, 2009, 10*) Удав решил установить мировой рекорд в прыжках в высоту среди удавов. Удав может из положения «свернувшись лежа» выпрямиться почти вертикально и разогнаться до скорости V. Длина Удава L. Каким может быть рекорд? Как должен двигаться Удав, чтобы установить рекорд? Масса Удава распределена равномерно по его длине.

$$h_{max} = \frac{3L}{4} + \frac{V^2}{2g}$$

Задача 7. (*Савченко, 2.2.41*) Однородная цепочка одним концом подвешена на нити так, что другим она касается поверхности стола. Нить пережигают. Определите зависимость силы давления цепочки на стол от длины x ещё не упавшей её части. Удар звеньев о стол неупругий, масса цепочки m, её длина l.

$$F = 3mg\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

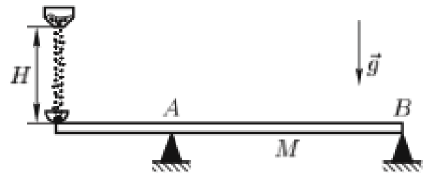
Задача 8. (*Всеросс., 2013, РЭ, 10*) Экспериментатор Глюк решил исследовать силу реакции опоры, действующую со стороны чаши весов на падающую однородную цепочку. Для этого он подвесил цепочку за верхнее звено так, что нижним звеном она почти касалась чаши электронных весов, и затем отпустил её. В момент начала падения автоматически запустился электронный секундомер. Мгновенные показания весов P и секундомера t передавались на обработку в компьютер. Результаты измерений несколько озадачили экспериментатора:

t, с	0,2	0,4	0,6
P, грамм	50	200	100

По этим данным определите массу m цепочки, её длину L и время падения t_1. Силами сопротивления воздуха пренебречь; $g = 10$ м/с^2.

$m = 100$ г, $L = 120$ см, $t_1 = 0{,}49$ с

Задача 9. (*Всеросс., 2010, РЭ, 11*) Некто провёл серию экспериментов по исследованию устойчивости системы, изображённой на рисунке.



Из бункера, расположенного на высоте H над выступающим краем однородной доски, лежащей на двух опорах, сразу после открывания заслонки начинает высыпаться песок с массовым расходом μ кг/с. Расстояние между опорами составляет 2/3 длины доски. Система устроена так, что, попадая в лёгкую чашу, закреплённую на краю доски, песок там и остаётся.

Экспериментатор заметил, что в первом опыте край доски оторвался от опоры B спустя время $\tau_1 = 1{,}00$ с после открывания заслонки. После этого экспериментатор вдвое уменьшил массовый расход песка и обнаружил, что доска снова оторвалась от опоры B спустя время τ_1. В третий раз он уменьшил расход песка вчетверо по сравнению с первоначальным, и доска оторвалась от опоры B уже спустя время $\tau_2 = 1{,}75$ с.

Зная, что масса доски $M = 700$ г, определите высоту H, с которой падал песок, и массовый расход μ песка в первом эксперименте.

$H = 5$ м, $\mu = 0{,}8$ кг/с