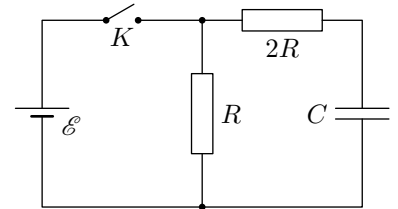


## Параметрические колебания

Колебания называются *параметрическими*, если они обусловлены периодическим изменением какого-либо параметра системы (например, индуктивности катушки или ёмкости конденсатора в колебательном контуре).

**ЗАДАЧА 1.** («Физтех», 2007) В схеме, изображённой на рисунке, периодически (с периодом  $3\tau$ ) повторяют следующий процесс: ключ замыкают на время  $\tau$  и размыкают на время  $2\tau$ , причём время  $\tau$  достаточно мало и напряжение на конденсаторе за это время изменяется незначительно. Через достаточно большое число повторений напряжение на конденсаторе становится практически постоянным, совершая лишь незначительные колебания около своего среднего значения.

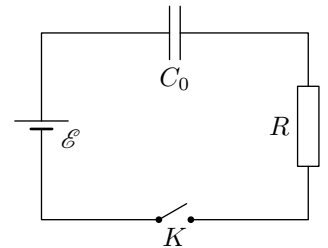


- 1) Найдите это среднее значение.
- 2) Найдите среднюю тепловую мощность, выделяющуюся в резисторе  $2R$  в установившемся режиме.

Все элементы можно считать идеальными, их параметры указаны на рисунке.

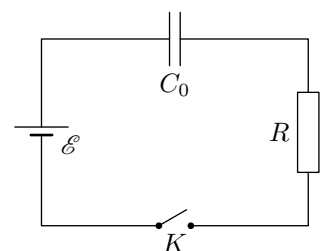
$$\frac{U}{z} \frac{6V}{4} = d \quad (z : \varrho \frac{1}{\xi} = \Omega \text{ I})$$

**ЗАДАЧА 2.** (МФТИ, 1991) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа  $K$  через некоторое время  $\tau$  установится стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе  $R$ , если начать изменять ёмкость конденсатора по закону  $C(t) = C_0(1 + A \sin \omega t)$ ,  $A < 1$ ? Рассмотреть случай медленных изменений ёмкости, т. е. когда  $2\pi/\omega \gg \tau$ . Заданными параметрами считать  $\mathcal{E}$ ,  $C_0$ ,  $R$ ,  $A$ ,  $\omega$ . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



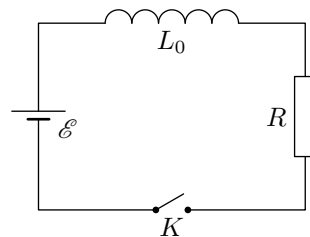
$$U_z^{(0)CV\omega\varrho} \frac{\xi}{1} \approx P$$

**ЗАДАЧА 3.** (МФТИ, 1991) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа  $K$  через некоторое время  $\tau$  установится стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе  $R$ , если начать изменять расстояние между пластинами конденсатора по закону  $d(t) = d_0(1 + A \sin \omega t)$ ,  $A < 1$ ? Рассмотреть случай быстрых изменений ёмкости, т. е. когда  $2\pi/\omega \ll \tau$ . Заданными параметрами считать  $\mathcal{E}$ ,  $R$ ,  $A$ . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



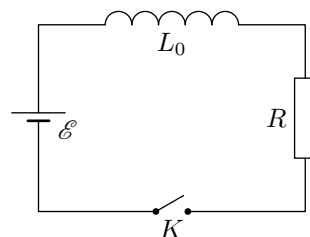
$$P \approx \frac{2U}{z} \frac{\xi}{\varrho}$$

ЗАДАЧА 4. (МФТИ, 1991) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа  $K$  через некоторое время  $\tau$  установится стационарный режим. Если теперь начать изменять индуктивность по закону  $L = L_0(1 + A \sin \omega t)$ , где  $A < 1$ , то ток через резистор  $R$  будет также меняться. Найти амплитуду переменной составляющей силы тока с частотой  $\omega$ . Рассмотреть случай медленных изменений индуктивности, т.е. когда  $2\pi/\omega \gg \tau$ . Заданными параметрами считать  $\mathcal{E}$ ,  $L_0$ ,  $R$ ,  $A$ ,  $\omega$ . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



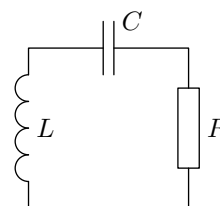
$$\frac{\tau \omega}{L_0} \approx 0$$

ЗАДАЧА 5. (МФТИ, 1991) В схеме, изображённой на рисунке, после замыкания ключа  $K$  через некоторое время  $\tau$  установится стационарный режим. Если теперь начать изменять индуктивность по закону  $L = L_0(1 + A \sin \omega t)$ , где  $A \ll 1$ , то в цепи появится переменная составляющая тока с частотой  $\omega$ . Найти амплитуду этой составляющей. Рассмотреть случай быстрых изменений индуктивности, т.е. когда  $2\pi/\omega \ll \tau$ . Заданными параметрами считать  $\mathcal{E}$ ,  $R$  и  $A$ . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



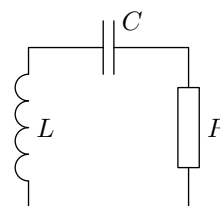
$$\frac{\omega}{\tau} \approx 0$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 2000) Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображённом на рисунке, индуктивность катушки быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину  $\Delta L$  ( $\Delta L \ll L$ ) каждый раз, когда ток в цепи равен нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, так же быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину  $\Delta L$ , если  $L = 0,15$  Гн,  $C = 1,5 \cdot 10^{-7}$  Ф,  $R = 20$  Ом.



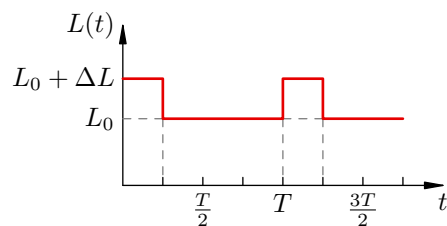
$$\Delta L \ll L$$

ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 2000) Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображённом на рисунке, ёмкость конденсатора быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину  $\Delta C$  ( $\Delta C \ll C$ ) каждый раз, когда напряжение на нём равно нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, так же быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину  $\Delta C$ , если  $L = 0,1$  Гн,  $C = 10^{-7}$  Ф,  $R = 30$  Ом.



$$\Delta C \ll C$$

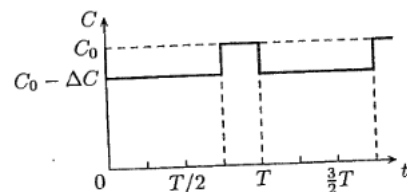
ЗАДАЧА 8. (МФТИ, 2000) Для поддержания незатухающих колебаний тока в колебательном  $LCR$ -контуре с периодом колебаний  $T = 10^{-3}$  с индуктивность  $L$  контура периодически изменяют во времени по закону, представленному на рисунке ( $\Delta L \ll L_0$ ). При каком максимальном значении сопротивления  $R$  колебания в контуре не будут затухать, если  $\Delta L = 0,03$  Гн?



Указание. Уменьшение индуктивности происходит при максимальном токе в контуре.

$$R_{\max} = \frac{L}{\Delta L} = 30 \text{ Ом}$$

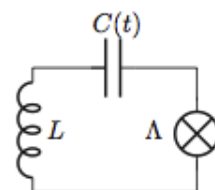
ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 2000) Для поддержания незатухающих колебаний тока в колебательном  $LCR$ -контуре с периодом колебаний  $T = 2 \cdot 10^{-4}$  с ёмкость  $C$  контура периодически изменяют во времени по закону, представленному на рисунке ( $\Delta C \ll C_0$ ). При каком максимальном значении сопротивления  $R$  колебания в контуре не будут затухать, если  $L = 0,08$  Гн,  $\Delta C/C_0 = 0,08$ ?



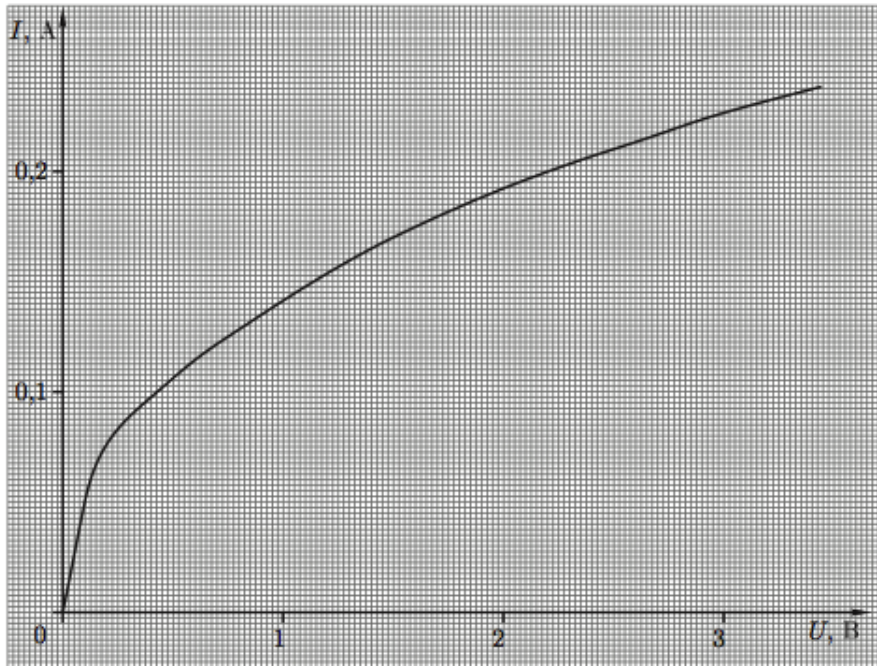
Указание. Уменьшение ёмкости происходит при максимальном заряде на конденсаторе.

$$R_{\max} = \frac{C_0}{\Delta C} LT = 32 \text{ Ом}$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 2007, финал, 11) В схеме, изображённой на рисунке, ёмкость конденсатора  $C$  периодически изменяется путём механического перемещения пластин. Допустим, что вследствие некоторого возмущения в схеме возникли малые колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе порядка нескольких милливольт. В момент времени, когда напряжение на конденсаторе максимально, его ёмкость скачкообразно уменьшают на долю  $\varepsilon = |\Delta C|/C$ . Через четверть периода  $\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$  ёмкость скачком увеличивают до прежнего значения; ещё через четверть периода ёмкость вновь скачкообразно уменьшают на долю  $\varepsilon$  и т. д. При определённых условиях в схеме могут возбудиться незатухающие электрические колебания.



В схему включён нелинейный элемент (лампочка накаливания  $\Lambda$ ), вольт-амперная характеристика которой представлена на рисунке.



- 1) Найдите минимальное значение  $\varepsilon_{\min}$ , при котором в схеме возбуждаются незатухающие колебания, если  $L = 0,1$  Гн,  $C = 10^{-7}$  Ф.
- 2) Найдите амплитуду установившихся колебаний напряжения на лампочке, если  $\varepsilon = 3\%$ .

$$I_{\min} \approx \frac{U_0}{\sqrt{2}} \approx 0,63\% \cdot U_0 = \frac{7}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} U_0 = 0,0025 \text{ В} \quad (1)$$