Относительность движения

Если муха ползёт по стенке вагона, а вагон движется по земле, то справедлив *закон сложения скоростей*:

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}, \qquad (1)$$

где

- $\vec{v}_{\text{абс}}$ — абсолютная скорость, то есть скорость мухи относительно земли;
- $\vec{v}_{\text{отн}}$ — относительная скорость, то есть скорость мухи относительно вагона;
- $\vec{v}_{\text{пер}}$ — переносная скорость, то есть скорость относительно земли той точки вагона, через которую в данный момент проползает муха.

Но муха может ползти не только по движущемуся вагону, но и, например, по неподвижному железнодорожному столбу. В этом случае закон сложения скоростей (1) по-прежнему справедлив. Снова абсолютная скорость $\vec{v}_{\text{абс}}$ есть скорость мухи относительно земли, а относительная скорость $\vec{v}_{\text{отн}}$ есть скорость мухи относительно вагона. Что же такое в этом случае переносная скорость?

Давайте представим себе, что с телом отсчёта — в данном случае с вагоном — жёстко связана невидимая среда S, заполняющая всё окружающее пространство. Среда S движется вместе с вагоном (как бы увлекается им), а вагон покоится относительно этой среды. Тогда переносная скорость — это скорость той точки среды S, через которую муха проползает в данный момент.

На примере ситуации с вагоном может показаться, что, коль скоро среда S увлекается телом отсчёта, то скорости всех точек среды S просто равны скорости тела отсчёта, и нечего потому огород городить. Однако это не так! Если, скажем, тело отсчёта вращается вокруг своей оси или движется по окружности, то вращается и среда S; тогда линейные скорости различных точек среды S, вообще говоря, различны, и переносная скорость может отличаться от скорости тела отсчёта (см. две последние задачи листка).

Задача 1. (*«Курчатов», 2017, 9*) Два авианосца движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями. Скорость первого авианосца 20 км/ч, скорость второго — 30 км/ч. В момент, когда расстояние между кораблями равно 60 км, с первого авианосца взлетает вертолёт и движется по прямой ко второму авианосцу со скоростью 150 км/ч. Долетев до второго авианосца, вертолёт зависает на 18 минут над этим кораблём, и затем возвращается на первый авианосец, вновь двигаясь со скоростью 150 км/ч. Сколько времени вертолёт отсутствовал на первом авианосце? Найдите путь, пройденный вертолётом.

48 мин; 84 км

Задача 2. (*МОШ, 2014, 7–8, 11*) Школьник Владислав идёт по движущемуся вверх эскалатору, поднимаясь за 20 с. Школьник Ярослав, стоя на этом же эскалаторе, поднимается за 60 с.

А) За какое время Владислав будет подниматься по эскалатору вверх, если эскалатор остановить?

В) За какое время Владислав будет подниматься по эскалатору вверх, если эскалатор запустят в обратном направлении с такой же по модулю скоростью, как и при движении вверх?

Ответы представьте в секундах и округлите до целых.

А) 30; В) 60

Задача 3. (*«Росатом», 2013, 11*) Ширина реки равна l. Если лодка плывёт против течения реки, её скорость относительно земли равна v, если по течению — $3v$. За какое минимальное время лодка может пересечь реку?

$\boxed{\tau_{\min} = \frac{l}{2v}}$

Задача 4. (*«Росатом», 2013, 9*) Корабль плывёт по реке с постоянной скоростью. По палубе с постоянной по величине скоростью ходит пассажир. От кормы к носу пассажир идёт со скоростью v относительно берега, а обратно со скоростью $v/2$ относительно берега. Длина палубы L. Пассажир прошел один раз от кормы к носу и обратно. Какое расстояние относительно берега прошёл за это время корабль? Скорость корабля относительно воды больше скорости пассажира относительно корабля.

$\boxed{6L}$

Задача 5. (*«Росатом», 2011, 11*) Поезд движется со скоростью v. Под некоторым углом к направлению его движения дует ветер; при этом скорость ветра, измеренная пассажиром поезда, равна v_1. Когда поезд увеличил скорость в два раза, сохранив направление движения, скорость ветра, измеренная пассажиром, стала равна $1{,}5v_1$. Определить величину скорости ветра относительно земли.

$\boxed{u = \sqrt{2v^2 - \frac{v_1^2}{4}}}$

Задача 6. (*МОШ, 2017, 9*) Ракета удаляется от горизонтальной поверхности Земли со скоростью V, направленной строго вертикально. Параллельно поверхности точно на запад летит самолёт со скоростью $V/\sqrt{3}$.

1) С какой наименьшей по модулю скоростью u и в каком направлении должен лететь (относительно Земли) квадрокоптер для того, чтобы относительно него ракета и самолёт имели противоположные по направлению скорости?

2) Под каким углом к горизонту (относительно Земли) должна быть направлена скорость квадрокоптера для того, чтобы ракета и самолёт имели в системе отсчёта квадрокоптера противоположные по направлению и равные по модулю скорости? Чему равен модуль скорости квадрокоптера в этом случае?

1) На запад под углом 30° к горизонту, $u_{\min} = V/2$; 2) на запад под углом 60° к горизонту, $u = V/\sqrt{3}$

Задача 7. (*Всеросс., 1996, финал, 9*) Минимальное время, которое необходимо, чтобы переплыть в лодке реку, равно t_0. Ширина русла реки равна H. Скорость течения реки постоянна в любом месте русла и в β раз больше скорости лодки ($\beta > 1$), плывущей в стоячей воде.

1) Найдите скорость лодки в стоячей воде.

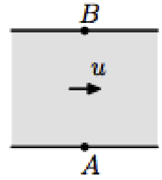
2) На какое расстояние снесёт лодку за минимальное время переправы?

3) Определите наименьшее расстояние, на которое может снести лодку за время переправы.

4) Найдите время переправы лодки в том случае, когда её сносит на минимальное расстояние.

1) $v = \frac{H}{t_0}$; 2) $L = \beta H$; 3) $L_{\min} = H\sqrt{\beta^2 - 1}$; 4) $t = \frac{\beta t_0}{\sqrt{\beta^2-1}}$

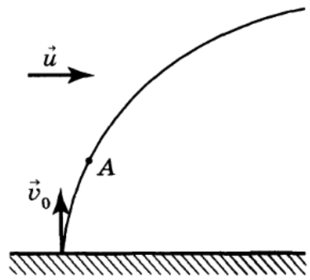
Задача 8. (*МОШ, 2015, 11*) Школьник Вася, находящийся в точке A, собирается переплыть на противоположный берег реки и оказаться как можно ближе к точке B, расположенной точно напротив точки A. Ширина реки равна L, скорость течения реки равна u, скорость Васи в стоячей воде равна v. Определите, на каком минимальном расстоянии от точки B может оказаться Вася после переправы. Объясните Ваш ответ. Изобразите на рисунке векторы скорости течения реки, скорости Васи в стоячей воде и скорости Васи относительно берега при оптимальном способе переправы. Решите задачу в общем случае и в частных случаях



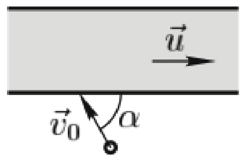
(а) $u = 0{,}8$ м/с, $v = 1$ м/с, $L = 100$ м;
(б) $u = 1$ м/с, $v = 0{,}8$ м/с, $L = 100$ м.

$x = 0$ при $v \geqslant u$ и $x = L\frac{\sqrt{u^2-v^2}}{v}$ при $v < u$; (а) $x = 0$, (б) $x = 75$ м

Задача 9. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 9*) Деревянный плот оттолкнули от берега так, что в начальный момент времени его скорость оказалась равной v_0 и направленной перпендикулярно берегу (рис.). Двигаясь по траектории, показанной на рисунке, плот через некоторое время T после начала движения оказался в точке A. Скорость реки постоянна и равна u. Графически найдите точки траектории плота, в которых он находился в моменты времени $2T$, $3T$ и $4T$.



Задача 10. (*Всеросс., 2009, финал, 9*) Во время экскурсии на кондитерскую фабрику экспериментатор Глюк заметил, что скорость конфеты, попадающей из упаковочной машины под углом $\alpha = 60°$ на ленту транспортёра (вид сверху приведён на рисунке), сначала уменьшается, а потом увеличивается. Начальная скорость $\vec{v}_0$ конфеты равна по модулю скорости $\vec{u}$ ленты транспортёра и лежит в плоскости ленты. Чему равна скорость $\vec{w}_0$ конфеты относительно ленты транспортёра сразу после попадания её на ленту? Вычислите минимальную скорость $v_{\min}$ конфеты относительно неподвижного Глюка.



$w_0 = u\sqrt{3}$; $v_{\min} = \frac{u}{2}$

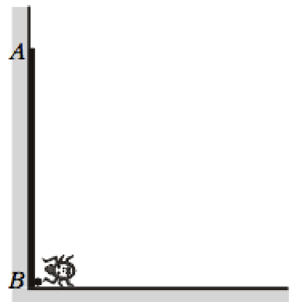
Задача 11. (*Всеросс., 2005, ОЭ, 9*) С линии старта одновременно в момент $t = 0$ ушли две гоночные машины с ускорениями

$$a_1(t) = a_0\left(1 + \sqrt{2 - \frac{t}{t_1}}\right) \quad \text{и} \quad a_2(t) = a_0\sqrt{2 - \frac{t}{t_1}}$$

соответственно. Начиная с момента времени t_1 скорость первой машины не изменялась, а вторая машина продолжила разгоняться с постоянным ускорением, пока в момент t_2 её скорость не сравнялась со скоростью первой машины. Каково расстояние ΔS между автомобилями в этот момент времени?

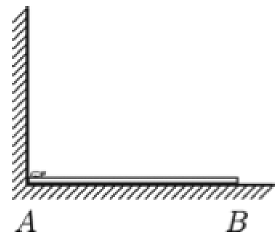
$\Delta S = \frac{a_0 t_1 t_2}{2}$

Задача 12. (*Всеросс., 2002, финал, 9*) У вертикальной стенки стоит палочка AB длиной L (рис.). На её нижнем конце B сидит жук. В тот момент, когда конец B начали двигать вправо по полу с постоянной скоростью v, жук пополз по палочке с постоянной скоростью u относительно неё. На какую максимальную высоту над полом поднимется жук за время своего движения по палочке, если её верхний конец не отрывается от стенки?



$$h_{\max} = \begin{cases} \dfrac{Lu}{2v}, & \text{если } u \leqslant v\sqrt{2}; \\ L\sqrt{1-\dfrac{v^2}{u^2}}, & \text{если } u > v\sqrt{2} \end{cases}$$

Задача 13. (*МОШ, 2017, 10*) Жёсткий стержень AB длиной L лежит на горизонтальном полу, придвинутый одним из своих концов вплотную к вертикальной стене, как показано на рисунке. В точке A сидит букашка. В тот момент, когда конец A стержня начали двигать вверх вдоль стены с постоянной по модулю скоростью V, букашка поползла по стержню с постоянной относительно стержня скоростью u в направлении конца B, который скользит по полу, не отрываясь от него. Найдите максимальное расстояние S от стенки до букашки в процессе её движения по стержню.



$$S = \begin{cases} \dfrac{uL}{2V}, & \text{если } u < V\sqrt{2}; \\ L\sqrt{1-\dfrac{V^2}{u^2}}, & \text{если } u \geqslant V\sqrt{2} \end{cases}$$

Задача 14. (*МОШ, 2008, 10*) Школьник бежит по окружности радиусом $R = 30$ м с постоянной по величине скоростью $u = 3{,}14$ м/с. Второй школьник гонится за ним, стартовав из центра окружности. В процессе погони он все время находится на радиусе, соединяющем центр окружности и первого школьника, а величина его скорости неизменна и равна $v = 2u$. Сколько времени займёт погоня?

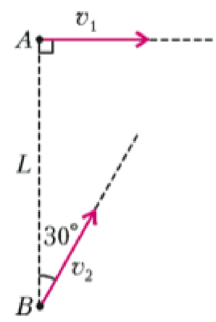
$$t = \frac{\pi R}{6u} = 5 \text{ с}$$

Задача 15. Торпеду выпускают из точки A в момент, когда корабль противника находится в точке B и движется со скоростью u. Направление движения корабля находится под углом β к линии AB (см. рисунок). Скорость торпеды равна v. Под каким углом α надо выпустить торпеду, чтобы она поразила цель?

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{u}{v}\sin\beta\right)$$

Задача 16. Два катера, находящиеся в данный момент в точках A и B, двигаются с постоянными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (см. рисунок). Найдите построением минимальное расстояние, на которое могут сблизиться катера в процессе дальнейшего движения.

Задача 17. (*Всеросс., 2010, финал, 9*) Два корабля движутся с постоянными и одинаковыми по модулю скоростями $v_1 = v_2 = v$. В некоторый момент расстояние между ними оказалось равным L, а их взаимное расположение таким, как показано на рисунке.



1) Определите минимальное расстояние между кораблями при их последующем движении.

2) Найдите время τ, через которое корабли окажутся на минимальном расстоянии друг от друга.

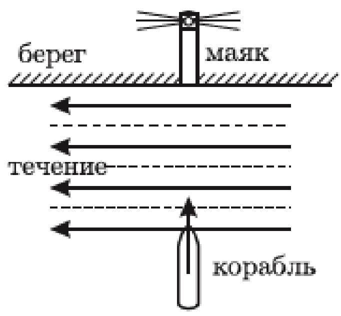
3) В момент, когда корабль B пересекает линию движения корабля A, от борта корабля A отправляется катер, который должен доставить на корабль B пакет с важным сообщением. Определите, через какое минимальное время Δt после отправки катера пакет будет доставлен на борт корабля B, если скорость u катера также равна v.

1) $d = \frac{L}{2}$; 2) $\tau = \frac{L\sqrt{3}}{2v}$; 3) $\Delta t = \frac{L}{v\sqrt{3}}$

Задача 18. (*МОШ, 2017, 10*) Две самоходные баржи равномерно движутся по озеру во взаимно перпендикулярных направлениях. Скорость одной баржи $v_1 = 3$ м/с, а другой — $v_2 = 4$ м/с. На каждой барже установлен анемометр — прибор для измерения модуля скорости ветра. В течение некоторого времени на каждом из кораблей каждую минуту снимают показания анемометров. По результатам измерений обнаружилось, что значения скорости ветра, полученные на первой барже, не превышали скорости баржи v_1, а на второй — не превышали v_2. Какого максимального значения могла достигать скорость ветра относительно озера во время измерений? Какой угол α составляла скорость первой баржи $\vec{v}_1$ с направлением ветра в момент, когда скорость ветра относительно озера была максимальной?

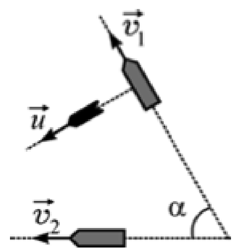
$u_{\max} = \frac{2v_1v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 4{,}8$ м/с; $\alpha = \arccos\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = \arccos\frac{4}{5} \approx 37°$

Задача 19. (*МОШ, 2009, 10*) Капитан корабля заметил строго на севере береговой маяк и приказал держать курс на него. В этот момент расстояние до берега было равно $S = 30$ км. Корабль движется относительно воды со скоростью $v = 15$ км/ч и в каждый момент времени держит курс на маяк. Экипаж не знает о присутствии в море западного течения, скорость которого во всех точках одинакова и равна $u = 5$ км/ч. За какое время t корабль доплывёт до маяка? За какое время он доплыл бы до маяка, двигаясь по кратчайшей траектории?



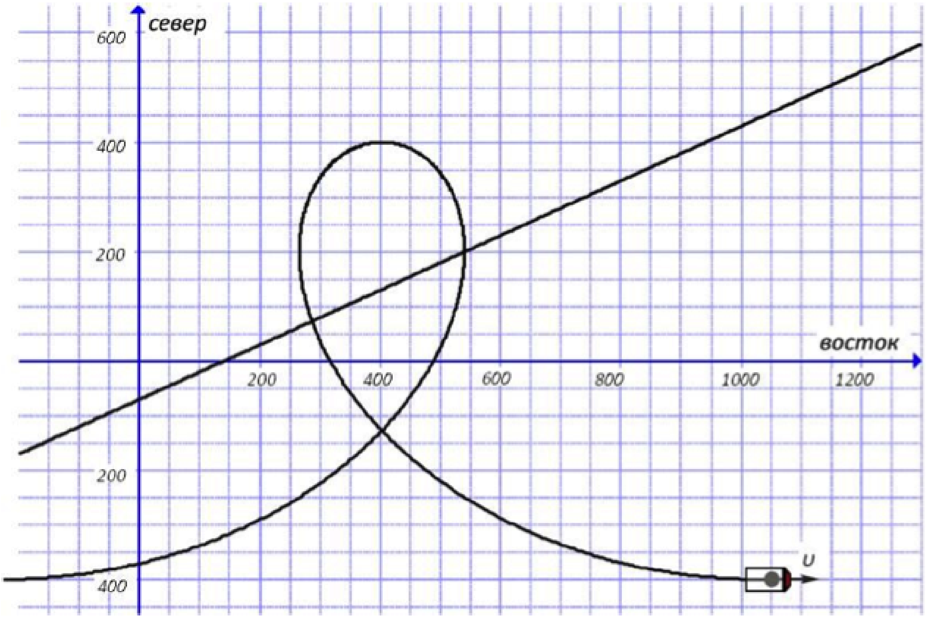
$t = \frac{Sv}{v^2-u^2} = \frac{9}{4}$ часа; $\tau = \frac{S}{\sqrt{v^2-u^2}} \approx 2{,}12$ часа

Задача 20. (*МОШ, 2013, 11*) Круизные лайнеры «Первый» и «Второй» плывут равномерно и прямолинейно. Угол между их курсами равен $\alpha = 60°$, скорость «Первого» $v_1 = 35$ км/ч, скорость «Второго» $v_2 = 31{,}6$ км/ч. С лайнера «Первый» с временным интервалом в несколько часов отплывают два катера, которые, двигаясь с постоянной одинаковой скоростью, перпендикулярной курсу «Первого», точно приплывают ко «Второму». Определите скорость u катера.



$u = \frac{v_1v_2\sin\alpha}{v_1 - v_2\cos\alpha} \approx 50$ км/ч

Задача 21. (*Всеросс., 2017, финал, 9*) При проведении аэрофотосъёмки была получена фотография, на которой видны два шлейфа дыма от паровозов (рис.). Одной клетке на фотографии соответствует 50 м на местности.



Известно, что один паровоз двигался равномерно по кольцевой ветке железной дороги, а другой — с такой же скоростью по прямой. Определите:

- направление скорости ветра;
- радиус R кольцевой железной дороги;
- отношение скорости паровоза v к скорости ветра u;
- направление прямой железнодорожной ветки (выполнить построения с помощью циркуля и линейки).

На запад; $R = 400$ м; $v/u = 2$

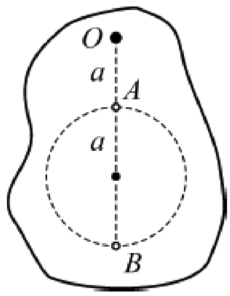
Задача 22. (*«Курчатов», 2017, 9*) Диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью v_0 вниз по наклонной плоскости, составляющей угол $60°$ с горизонтом. Найдите модуль скорости верхней точки диска.

$v = v_0\sqrt{3}$

Задача 23. (*«Курчатов», 2017, 10*) Диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $30°$ с горизонтом. Найдите модуль скорости нижней точки диска.

$v = v_0\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Задача 24. (*МОШ, 2017, 9*) На очень лёгком клочке бумаги нарисовали окружность радиусом a и подвесили его на неподвижной горизонтальной оси O, относительно которой клочок может свободно вращаться (см. рисунок). В точку A, которая находится на нарисованной окружности под осью, садится жук и начинает ползти по этой окружности с постоянной по модулю скоростью V, перемещаясь в точку B, расположенную на продолжении отрезка OA. Через какое время от начала движения жук будет иметь максимальную скорость относительно неподвижной (лабораторной) системы отсчёта, если $|OA| = a$? Чему будет равна эта скорость? Считайте массу жука намного больше массы клочка бумаги.

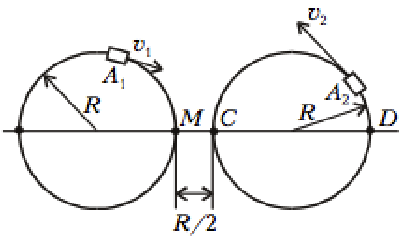


$t = \frac{\pi a}{3V}$; $v_{max} = V$

Задача 25. Шарообразная планета радиусом R вращается вокруг своей оси, при этом линейная скорость точек экватора равна u. Вокруг планеты в плоскости экватора по круговой орбите радиусом $2R$ вращается спутник со скоростью $3u$ (направления вращения спутника и планеты совпадают). Найдите скорость спутника относительно планеты.

$v_{отн} = u$

Задача 26. (*Всеросс., 1999, финал, 10*) По двум кольцевым дорогам радиуса R, лежащим в одной плоскости, движутся автомобили A_1 и A_2 со скоростями $v_1 = v = 20$ км/ч и $v_2 = 2v$ (см. рисунок). В некоторый момент автомобили находились в точках M и C на расстоянии $R/2$ друг от друга. Размеры автомобилей малы по сравнению с R.



1) Найдите скорость автомобиля A_2 в системе отсчёта, связанной с автомобилем A_1 в этот момент.

2) Найдите скорость автомобиля A_2 в системе отсчёта, связанной с автомобилем A_1, когда A_2 окажется в точке D.

1) $v_{отн} = \frac{v}{2} = 10$ км/ч; 2) $v_{отн} = \frac{11v}{2} = 110$ км/ч