

## Неидеальный газ

В данном листке рассматриваются газы, уравнение состояния которых отличается от уравнения Менделеева — Клапейрона.

ЗАДАЧА 1. Для потенциальной энергии парного взаимодействия молекул реального газа во многих случаях хорошо работает следующая формула (*потенциал Леннарда-Джонса*):

$$W(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6};$$

здесь  $r$  — расстояние между двумя молекулами,  $a$  и  $b$  — положительные константы.

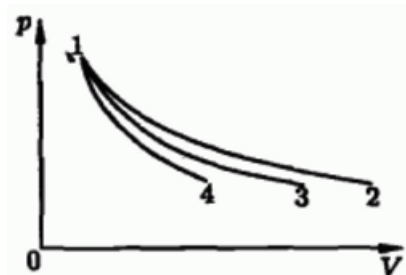
- 1) Постройте (качественно) график функции  $W(r)$ .
- 2) Исходя из вида графика заключите, что при больших расстояниях между молекулами преобладают силы притяжения, а при малых — силы отталкивания.

ЗАДАЧА 2. (*Всеросс., 2001, ОЭ, 11*) Теплоизолированный сосуд объёма  $V_1$  разделён перегородкой на две части. В одной части сосуда, имеющей объём  $V_2$ , находится  $\nu$  молей сильно сжатого одноатомного газа при температуре  $T$ . В другой части сосуда вакуум. В некоторый момент перегородка разрушается. Определите установившуюся температуру  $T'$  газа. Известно, что при адиабатическом сжатии  $\nu$  молей этого газа из сильно разреженного состояния с температурой  $T$  до объёма  $V_1$  над газом совершают работу  $A_1$  и его температура становится  $T_1$ , а при сжатии до объёма  $V_2$  совершают работу  $A_2$  и температура становится  $T_2$ .

*Примечание.* При сильном сжатии газа существенно взаимодействие между его молекулами. В выражении для внутренней энергии заданной массы газа появляется (по сравнению с идеальным газом) дополнительное слагаемое, однозначно определяемое объёмом газа.

$$\frac{\nu a \epsilon}{(1V - \epsilon V)^2} + \tau L - \tau L + L = \nu L$$

ЗАДАЧА 3. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 11*) Экспериментатор Глюк обратил внимание на то, что почти у всех известных ему изопроцессов (изохорического, изобарического, изотермического и адиабатического) график зависимости давления от объёма имеет соответствующее название: изохора, изобара, изотерма, адиабата. У процесса же, в ходе которого не изменяется внутренняя энергия, такого названия нет! Глюк решил восполнить этот пробел и назвал отмеченную зависимость «изоэргой». Далее он решил сравнить ход «изоэрги» с изотермой и адиабатой для реального одноатомного газа при условиях, близких к нормальным. На рисунке приведены результаты его исследований. Выясните, какому из трех процессов 1–2, 1–3 или 1–4 соответствует «изоэрга», какому — изотерма, а какому — адиабата. Ответ обоснуйте.



ЗАДАЧА 4. (МФТИ, 2004) Внутренняя энергия  $U$  некоторой массы неидеального газа зависит от температуры  $T$  и объёма  $V$  по формуле  $U = cT - a/V$ , где  $c$  и  $a$  — известные константы. Такой газ из начального состояния с давлением  $p_1$  и объёмом  $V_1$  расширяется сначала в изобарическом процессе, а затем в изохорическом процессе переводится в конечное состояние, в котором его объём в  $k$  раз ( $k > 1$ ) больше начального. В результате всего процесса температура газа уменьшилась на  $\Delta T$  ( $\Delta T > 0$ ), а его внутренняя энергия не изменилась.

- 1) Найти  $\Delta T$ .
- 2) Какое суммарное количество теплоты сообщили газу во всём процессе?

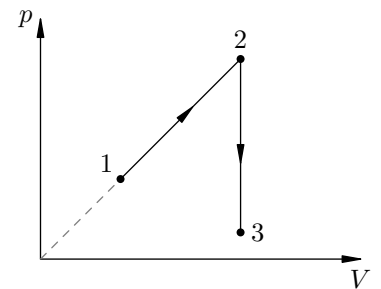
$$\frac{1}{\Lambda} \text{Id}(1 - \eta) = \partial \left( z : \frac{1}{\Lambda} \frac{\eta}{1 - \eta} = \mathcal{L}\nabla(1) \right)$$

ЗАДАЧА 5. (МФТИ, 2004) Внутренняя энергия  $U$  некоторой массы неидеального газа зависит от температуры  $T$  и объёма  $V$  по формуле  $U = cT - a/V$ , где  $c$  и  $a$  — известные константы. Такой газ нагревается сначала в изохорическом процессе, а затем охлаждается в изобарическом процессе до первоначальной температуры. Объём газа в конечном состоянии в  $k$  раз ( $k > 1$ ) меньше начального, а внутренняя энергия в конечном состоянии меньше, чем в начальном, на величину  $\Delta U$  ( $\Delta U > 0$ ). В результате всего процесса от газа отвели суммарное количество теплоты  $Q$  ( $Q > 0$ ).

- 1) Найти начальный объём газа.
- 2) Найти конечное давление газа.

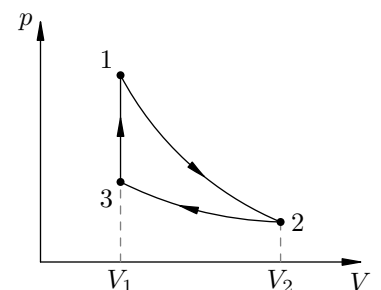
$$\frac{v}{\Lambda \nabla(\Lambda \nabla - \partial)} \frac{z(1 - \eta)}{\eta} = z d \left( z : \frac{\Lambda \nabla}{v(1 - \eta)} = \frac{1}{\Lambda} (1) \right)$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 1993) Внутренняя энергия  $U$  неидеального газа зависит от температуры  $T$  и объёма  $V$  по формуле  $U = cT - a/V$ , где  $c$  и  $a$  — известные константы. Такой газ, расширяясь в процессе 1–2:  $p = \beta V$  (см. рисунок;  $p$  — давление,  $\beta$  — заданная константа), совершает работу величиной  $A$ . В процессе изохорического охлаждения газа 2–3 до первоначальной температуры от него пришлось отвести количество теплоты  $Q$ . Сколько теплоты было подведено к газу в процессе расширения 1–2, если его объём увеличился при этом в  $\alpha$  раз?



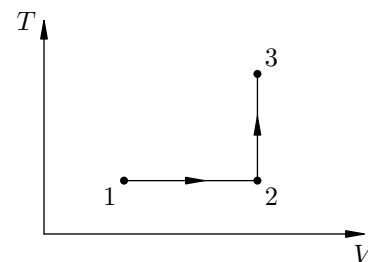
$$\frac{Vz}{g(1 - z^v)} \wedge \frac{v}{(1 - v)^v} + \partial + V = z \text{Id}$$

ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 1993) Внутренняя энергия  $U$  неидеального газа зависит от температуры  $T$  и объёма  $V$  по формуле  $U = cT - a/V$ , где  $c$  и  $a$  — заданные константы. Такой газ из состояния с объёмом  $V_1$  описывает замкнутый цикл, состоящий из адиабаты 1–2, изотермы 2–3 и изохоры 3–1 (см. рисунок). Найти разность конечной и начальной температур газа в изохорическом процессе, если величина работы газа в адиабатическом процессе оказалась в  $\beta$  раз больше величины работы изотермического сжатия. Известно, что  $V_2 = \alpha V_1$ , а суммарное количество теплоты, подведённое к газу за цикл, равно  $Q$ .



$$\frac{1}{\Lambda} \frac{v}{1 - v} + \frac{\partial}{g} \frac{1 - g}{g} = \mathcal{L}\nabla$$

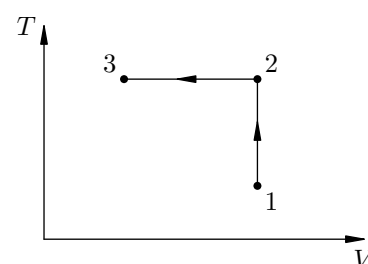
ЗАДАЧА 8. (МФТИ, 2003) Газ фотонов из начального состояния 1 расширяется в изотермическом процессе 1–2, а затем нагревается в изохорическом процессе 2–3 (см. рисунок). Во всём процессе перехода 1–2–3 газ совершил работу  $A$ , а его температура и объём увеличились в два раза. Какое количество теплоты было подведено к газу в процессе перехода 1–2–3?



*Указание.* В пустом сосуде переменного объёма  $V$ , температура стенок которого  $T$ , возникает равновесный газ фотонов, которые излучаются и поглощаются стенками сосуда. Внутренняя энергия этого газа  $U = \alpha T^4 V$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Давление газа фотонов определяется только его температурой:  $p = \frac{1}{3} \alpha T^4$ .

$$\nabla T^6 = \partial$$

ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 2003) Газ фотонов из начального состояния 1 нагревается в изохорическом процессе 1–2 так, что его температура увеличилась в  $3/2$  раза. Затем газ сжимается в изотермическом процессе 2–3 (см. рисунок). В конечном состоянии 3 внутренняя энергия газа фотонов оказалась равной начальной. В процессе всего перехода 1–2–3 от газа пришлось отвести количество теплоты  $Q$  ( $Q > 0$ ). Найти внутреннюю энергию газа фотонов в начальном состоянии.



*Указание.* В пустом сосуде переменного объёма  $V$ , температура стенок которого  $T$ , возникает равновесный газ фотонов, которые излучаются и поглощаются стенками сосуда. Внутренняя энергия этого газа  $U = \alpha T^4 V$ , где  $\alpha = \text{const}$ . Давление газа фотонов определяется только его температурой:  $p = \frac{1}{3} \alpha T^4$ .

$$\partial \frac{\partial \partial}{\partial \partial} = \partial \Omega$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 2004, ОЭ, 10) Для описания некоторых систем используется модель идеального бозе-газа. При температурах ниже определённой (называемой температурой бозе-эйнштейновской конденсации) внутренняя энергия моля такого газа определяется выражением  $U = \frac{3}{2} A V T^{5/2}$ , а давление не зависит от объёма и равно  $p = A T^{5/2}$ , где  $A$  — некоторая константа. В этих условиях над газом совершают такой процесс расширения, что  $T V^\lambda = \text{const}$ , где  $\lambda$  — заданное число. Поглощается или отдаётся теплота газом в этом процессе?

*Примечание.* При  $\mu x \ll 1$  справедлива формула  $(1 + x)^\mu = 1 + \mu x$ .

$$\Delta p \left( \frac{\partial}{\partial \partial} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \partial} \frac{\partial}{\partial \partial} = \partial \partial$$

ЗАДАЧА 11. (Всеросс., 1993, финал, 10) Неидеальный газ, находившийся изначально в некотором исходном состоянии, адиабатически расширился, совершив при этом работу. Далее этот газ изохорически перевели в состояние с первоначальной температурой, а затем изотермическим процессом перевели в исходное состояние. Найдите работу  $A_{\text{ад}}$ , совершённую газом при адиабатическом расширении, если в изохорическом процессе к нему было подведено количество теплоты  $Q$ , а в изотермическом процессе газом была совершена работа  $A$ . Внутренняя энергия  $U$  и давление  $p$  неидеального газа заданы следующими выражениями:  $U = \rho(T) V$  и  $p = \frac{1}{3} \rho(T)$ , где  $\rho(T)$  является функцией только температуры,  $V$  — объём газа.

$$\nabla \partial + \partial = \nabla \partial \nabla$$

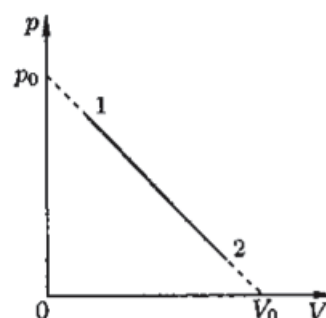
ЗАДАЧА 12. (Всеросс., 1993, финал, 11) Рабочее вещество, внутренняя энергия  $U$  которого связана с давлением  $p$  и объёмом  $V$  соотношением  $U = kpV$ , совершает термодинамический цикл, состоящий из изобары, изохоры и адиабаты. Работа, совершённая рабочим веществом во время изобарного процесса, в  $m = 5$  раз превышает работу внешних сил по сжатию вещества, совершённую при адиабатном процессе. Коэффициент полезного действия цикла  $\eta = 1/4$ . Определите коэффициент  $k$ .

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = \frac{m p_0 V_0}{1 - (m-1) p_0 V_0} = \eta$$

ЗАДАЧА 13. (Всеросс., 2005, финал, 11) Разрабатывая кинетическую теорию газов, Клаузиус ввёл в уравнение состояния идеального газа (в расчёте на 1 моль) поправку  $b$ , которая имеет смысл собственного объёма молекул газа:

$$p(V - b) = RT.$$

Процесс 1–2 (рис.) производится сначала с одним молем идеального газа, а затем с одним молем газа Клаузиуса. Найдите разность  $\Delta T$  максимальных температур газов в этих опытах, а также укажите, какая из них больше.



Известно, что  $p_0 = 1,51$  МПа,  $b = 44$  см<sup>3</sup>/моль  $\ll V_0$ ,  $R = 8,310$  Дж/(моль · К).

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{p_0 V_0}{R} \approx 4,0 \text{ К}$$

ЗАДАЧА 14. (Всеросс., 2004, ОЭ, 11) Экспериментатор Глюк исследовал неизвестный газ и обнаружил, что он подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона лишь приближённо. Зависимость его давления  $p$  от температуры  $T$ , объёма  $V$  и количества молей  $\nu$  можно описать формулой

$$p = \frac{\nu RT}{V} + \frac{\nu^2}{V^2}(bT - a),$$

где  $a$  и  $b$  — малые параметры<sup>1</sup>. Глюк предположил, что выражение для внутренней энергии  $U$  также немного отличается от формулы в случае идеального газа и имеет вид

$$U = \frac{3}{2}\nu RT - \frac{c\nu^2}{V}.$$

Размышляя над различными способами измерения коэффициента  $c$ , Глюк вспомнил, что КПД цикла Карно зависит только от температур нагревателя и холодильника. Используя это утверждение, он определил значение коэффициента  $c$  без проведения измерений. Найдите  $c$ , считая известными  $a$  и  $b$ .

$$c = 2$$

ЗАДАЧА 15. (IPhO, 2014)

- [Van der Waals equation of state.](#)
- [Solution.](#)

<sup>1</sup>От себя заметим, что в данной задаче речь идёт об одной из самых известных моделей реального газа — так называемом газе Ван-дер-Ваальса. Дальнейшее изучение газа Ван-дер-Ваальса — это следующая задача с IPhO-2014, ну и, разумеется, [второй том Сивухина](#).

ЗАДАЧА 16. (*Всеросс., 2003, финал, 11*) Изучая некоторое вещество, экспериментатор Глюк обнаружил, что для небольшого изменения объёма  $\Delta V$  требуется увеличить давление на малую величину  $\Delta p_1$ , если это делать изотермически, и на малую величину  $\Delta p_2$ , если сжатие производить адиабатически. Кроме того, Глюк измерил удельные теплоёмкости  $C_V$  при постоянном объёме и  $C_p$  при постоянном давлении в той же точке. К сожалению, результат последнего измерения ( $C_p$ ) был утрачен. Помогите Глюку по результатам первых трёх измерений восстановить значение  $C_p$ . Рассмотрите два случая:

- 1) исследуемое вещество было идеальным газом;
- 2) исследовалось вещество с неизвестным уравнением состояния.

$$C_p = C_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$