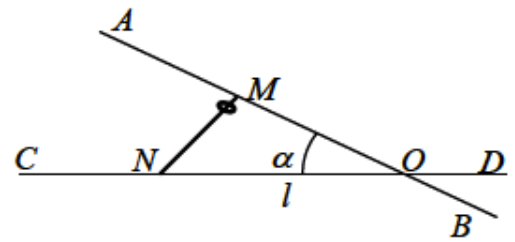


## Наклонная плоскость

ЗАДАЧА 1. На гладкую наклонную плоскость с углом наклона  $\alpha$  положили брусок массой  $m$  и отпустили. Найдите ускорение бруска и силу давления бруска на плоскость.

$$v \cos \beta \sin \alpha = N \quad v \sin \beta = v$$

ЗАДАЧА 2. («Росатом», 2017, 11) (Г. Галилей, «Беседы и математические доказательства двух новых наук», 1637 г.). Маленькое колечко движется по гладкой спице  $MN$ . Начало движения колечка — точка  $M$  — лежит на прямой  $AB$ , наклонённой под углом  $\alpha$  к горизонту; конец — точка  $N$  — на горизонтали  $CD$ , на расстоянии  $l$  от точки  $O$  пересечения горизонтали  $CD$  с наклонной прямой  $AB$ . На каком расстоянии от точки  $O$  должна быть расположена точка  $M$ , чтобы время движения колечка от точки  $M$  до точки  $N$  было минимальным?



$$l = ON$$

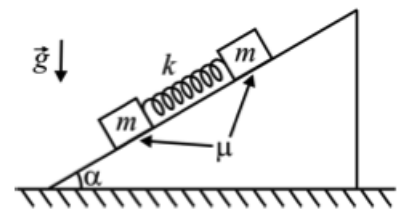
ЗАДАЧА 3. На наклонную плоскость с углом наклона  $\alpha$  положили брусок массой  $m$  и отпустили. Найдите ускорение бруска и силу трения, действующую на брусок. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен  $\mu$ .

$$F_{\text{тр}} = \mu N \text{ или } F_{\text{тр}} = mg \sin \alpha \text{ и } 0 = a \text{ или } a = g \sin \alpha \text{ и } F_{\text{тр}} = 0 \text{ или } a = g \sin \alpha \text{ и } F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha$$

ЗАДАЧА 4. (Всеросс., 2017, ШЭ, 10) Небольшому телу, находящемуся на наклонной плоскости, сообщили некоторую скорость, направленную вверх вдоль этой плоскости. Через некоторое время оно вернулось в точку старта со скоростью, направленной противоположно начальной и вдвое меньшей по модулю. Определите угол наклона плоскости, если коэффициент трения скольжения между ней и телом равен  $\mu = 0,2$ . Модуль ускорения свободного падения можно считать равным  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

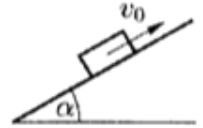
$$\alpha = \arctg \frac{3}{4} \approx 36,9^\circ$$

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2019, ШЭ, 11) Два одинаковых маленьких бруска массами  $m = 0,6 \text{ кг}$  каждый соединили друг с другом лёгкой пружиной жёсткостью  $k = 80 \text{ Н/м}$  и положили на наклонную плоскость, образующую угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между брусками и плоскостью равен  $\mu = 0,8$ . При какой максимальной деформации  $\Delta x$  пружины эта система может находиться в покое? Считайте, что  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .



$$\Delta x = \frac{mg \sin \alpha}{k} \approx 0,1 \text{ м}$$

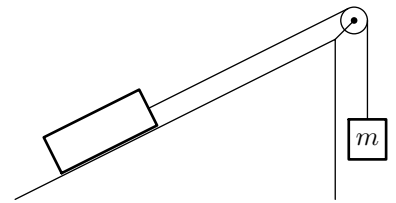
ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2010, финал, 10) Небольшую шайбу толкнули вверх вдоль наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  с начальной скоростью  $v_0$  (рис.).



- 1) Через какое время  $t_0$  шайба вернётся в исходную точку при отсутствии трения?
- 2) При каких значениях коэффициента трения  $\mu$  шайба возвратится назад?
- 3) Определите время  $t_\mu$  возврата шайбы в исходную точку при наличии трения.
- 4) При каком значении коэффициента трения  $\mu$  время  $t_\mu$  будет равно  $t_0$  — времени возврата шайбы при отсутствии трения?

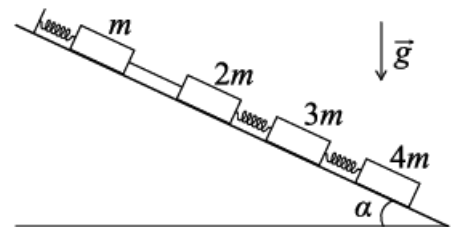
$$v_0 \sin \alpha = 0 \text{ (т.е. } \left( \frac{v_0 \cos \alpha}{1} - \frac{v_0 \sin \alpha}{1} + \frac{v_0 \sin \alpha}{1} \right) \frac{b}{v_0} = \mu \text{ (т.е. } v_0 \sin \alpha > \mu \text{ (т.е. } \frac{v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} = \mu \text{ (т.е. } \mu < \tan \alpha \text{))}$$

ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 2007) Груз массой  $m = 2$  кг соединён достаточно длинной невесомой перекинутой через блок нитью со вторым грузом, находящимся на закреплённой наклонной плоскости (см. рисунок). Грузам сообщили некоторую начальную скорость, и систему предоставили самой себе. В некоторый момент скорость груза  $m$  направлена вверх и равна  $v = 8$  м/с. Через время  $t = 2$  с груз остановился. Найдите силу натяжения нити. Ускорение свободного падения примите равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



$$m \sin \alpha = (v_0 - v) \mu = L$$

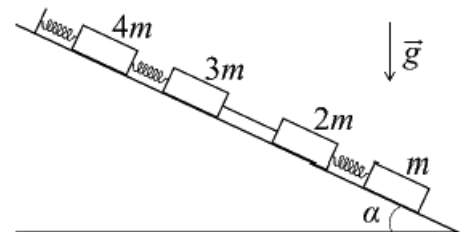
ЗАДАЧА 8. («Физтех», 2016, 9) Брусочки с массами  $m, 2m, 3m$  и  $4m$ , соединённые лёгкими пружинами и нитью (см. рисунок), удерживаются неподвижно с помощью упора на гладкой наклонной поверхности с углом наклона к горизонту  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 1/3$ ).



- 1) Найти силу натяжения нити.
- 2) Найти ускорение (направление и модуль) бруска массой  $m$  сразу после пережигания нити.

$$m \sin \alpha = v_0 \text{ (т.е. } \mu \sin \alpha = L \text{ (т.е. } \mu < \tan \alpha \text{))}$$

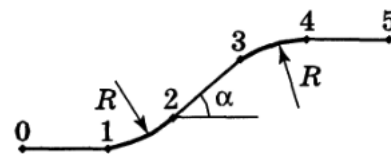
ЗАДАЧА 9. («Физтех», 2016, 10) Брусочки с массами  $m, 2m, 3m$  и  $4m$ , соединённые лёгкими пружинами и нитью (см. рисунок), удерживаются неподвижно с помощью упора на гладкой наклонной поверхности с углом наклона к горизонту  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 1/6$ ).



- 1) Найти силу натяжения нити.
- 2) Найти ускорение (направление и модуль) бруска массой  $2m$  сразу после пережигания нити.

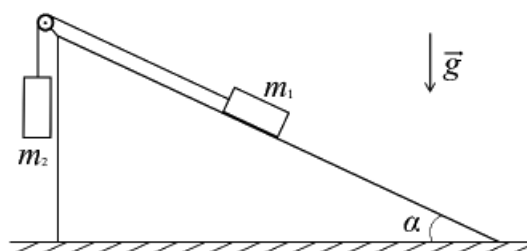
$$m \sin \alpha = v_0 \text{ (т.е. } \mu \sin \alpha = L \text{ (т.е. } \mu < \tan \alpha \text{))}$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 2000, ОЭ, 9) Грузовик въезжает с постоянной по модулю скоростью  $v$  на горку по дороге, профиль которой изображен на рисунке. Дорога состоит из прямолинейных участков (горизонтальных 0–1 и 4–5, под углом  $\alpha$  к горизонту 2–3) и дуг окружностей (1–2, 3–4) радиуса  $R$ . В кузове грузовика находится незакреплённый груз. При каком минимальном критическом коэффициенте трения  $\mu_{кр}$  груза о кузов груз будет неподвижен относительно грузовика во время движения? В каком месте дороги груз начнёт скользить по кузову, если коэффициент трения окажется чуть меньше, чем  $\mu_{кр}$ ? Ответ обоснуйте. Размеры грузовика пренебрежимо малы по сравнению с  $R$ .



$$\xi \text{ эжн.о.л я :v соэ} > \frac{v^2 b}{z^2} \text{ илп } \frac{v^2}{z^2} - v \text{ соэ} = \text{дрл}$$

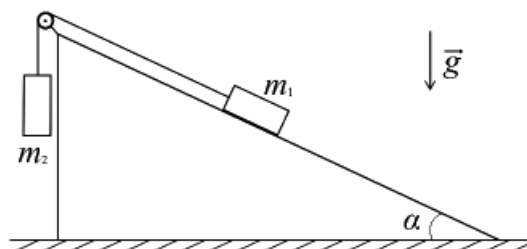
ЗАДАЧА 11. («Физтех», 2016, 9) Клин массой  $m$  находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Через блок, укреплённый на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая грузы, массы которых  $m_1 = 2m$  и  $m_2 = 3m$ . Грузы удерживают, затем отпускают. После этого грузы движутся, а клин покоится. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 0,6$ ).



- 1) Найдите ускорение грузов.
- 2) Найдите силу нормальной реакции, действующей на клин со стороны стола.

$$b \text{ ш } \frac{2z1}{699} = N (z : b \frac{2z}{6} = v (I$$

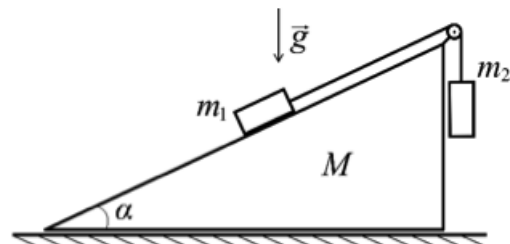
ЗАДАЧА 12. («Физтех», 2016, 9) Клин массой  $4m$  находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Через блок, укреплённый на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая грузы, массы которых  $m_1 = 3m$  и  $m_2 = m$ . Грузы удерживают, затем отпускают. После этого грузы движутся, а клин покоится. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтом угол  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 0,8$ ).



- 1) Найдите ускорение грузов.
- 2) Найдите силу трения, действующую на клин со стороны стола.

$$b \text{ ш } \frac{001}{89} = f (z : b \frac{0z}{z} = v (I$$

ЗАДАЧА 13. («Физтех», 2017, 9) Кли́н массой  $M$  находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола. Через блок, укрепленный на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая грузы, массы которых  $m_1$  и  $m_2$  (см. рис). Грузы удерживают, затем отпускают. После этого грузы движутся, а клин покоится. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтальной плоскостью угол  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 0,8$ ). Считайте  $M = 2m$ ,  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ . Массой блока и трением в его оси пренебречь.

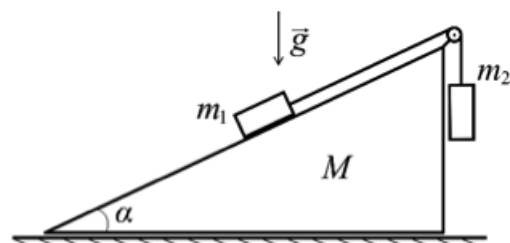


1) Найдите ускорение грузов.

2) При каких значениях коэффициента  $\mu$  трения скольжения клина по столу клин будет оставаться в покое?

$$\frac{g \sin \alpha}{g} < \mu \quad (\mu : \frac{g}{g} = \mu \frac{g}{g \sin \alpha} = \mu \frac{1}{\sin \alpha} = \mu \frac{1}{0,8} = \mu \frac{5}{4} > 1)$$

ЗАДАЧА 14. («Физтех», 2017, 10) Кли́н массой  $M$  находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола. Через блок, укрепленный на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая грузы, массы которых  $m_1$  и  $m_2$  (см. рис). Грузы удерживают, затем отпускают. После этого грузы движутся, а клин покоится. Гладкая наклонная поверхность клина образует с горизонтальной плоскостью угол  $\alpha = \pi/6$ . Считайте  $M = 2m$ ,  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 2m$ . Массой блока и трением в его оси пренебречь.



1) Найдите ускорение грузов.

2) Найдите силу  $T$  натяжения нити.

3) Найдите силу  $N$  нормальной реакции, действующей на клин со стороны стола.

$$m_2 g \sin \alpha = N \quad (g : \sin \alpha = L \quad (\mu : \frac{g}{g} = \mu \frac{g}{g \sin \alpha} = \mu \frac{1}{\sin \alpha} = \mu \frac{1}{0,5} = \mu \frac{2}{1} = 2 > 1)$$

ЗАДАЧА 15. (Всеросс., 2014, ШЭ, 11) Неподвижная наклонная плоскость наклонена под углом  $\alpha$  к горизонту. Брусок может скользить по ней с коэффициентом трения  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ . Бруску сообщают начальную скорость, направленную вверх вдоль горки. Определите отношение времени подъёма бруска ко времени его опускания.

$$\frac{v \sin \alpha + v \sin \alpha}{v \sin \alpha - v \sin \alpha} \sqrt{\frac{2}{g}} = \frac{2}{1}$$

ЗАДАЧА 16. (Всеросс., 2016, МЭ, 11) Гоночный автомобиль движется по виражу — участку дороги, на котором реализован поворот с наклоном дорожного полотна, причём внешняя сторона полотна находится выше, чем внутренняя. Оказалось, что для некоторого виража радиусом  $R = 500$  м и с углом наклона полотна дороги к горизонту  $\alpha = 30^\circ$  максимальная скорость, с которой автомобиль может проехать этот поворот, составила  $v_0 = 360$  км/ч. Определите, чему равнялась бы максимальная скорость в случае, если бы дорожное полотно на повороте было уложено без наклона. Ускорение свободного падения считайте равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, радиус виража измеряется в горизонтальной плоскости.

$$\frac{v \sin \alpha + v \sin \alpha}{v \sin \alpha - v \sin \alpha} \sqrt{\frac{2}{g}} = a$$

Задача 17. (МОШ, 2014, 10–11) Брусок массой 1 кг лежит на шероховатой наклонной плоскости. Чтобы сдвинуть его вдоль наклонной плоскости вниз, надо приложить минимальную силу 2 Н, чтобы сдвинуть вдоль наклонной плоскости вверх — минимальную силу 4 Н. Ускорение свободного падения  $10 \text{ м/с}^2$ .

А) С каким ускорением будет двигаться брусок, если приложить к нему силу 5 Н, направленную вдоль наклонной плоскости вверх? Ответ выразите в  $\text{м/с}^2$  и округлите до второй значащей цифры.

В) Какую минимальную силу надо приложить к бруску вдоль наклонной плоскости в горизонтальном направлении, чтобы он начал движение? Ответ выразите в ньютонах и округлите до второй значащей цифры.

С) С каким ускорением будет двигаться брусок, если его положить на горизонтальную поверхность, изготовленную из того же материала, что и наклонная плоскость, и приложить к нему горизонтальную силу 2,5 Н? Ответ выразите в  $\text{м/с}^2$  и округлите до второй значащей цифры.

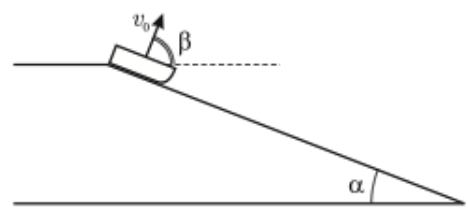
Д) С каким ускорением будет двигаться брусок, если его положить на горизонтальную поверхность, изготовленную из того же материала, что и наклонная плоскость, и приложить к нему горизонтальную силу 4 Н? Ответ выразите в  $\text{м/с}^2$  и округлите до второй значащей цифры.

1 (A) 1; 2; 3; (C) 0; 1 (D) 1

Задача 18. (МОШ, 2011, 9) На наклонной плоской поверхности, составляющей угол  $\alpha = 60^\circ$  с горизонтом, находится небольшая плоская шайба массой  $m = 0,5 \text{ кг}$ , прикрепленная лёгкой нитью длиной  $L = 1 \text{ м}$  к точке на этой поверхности. Шайбу толкнули вдоль поверхности так, что нить натянута и скорость шайбы перпендикулярна нити. В некоторый момент шайба имеет направленную горизонтально скорость  $v = 2 \text{ м/с}$ . Коэффициент трения шайбы о плоскость равен  $\mu = 0,6$ . Каково по модулю ускорение  $a$  шайбы в этот момент времени? Какова сила  $F$  натяжения нити в этот момент? Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .

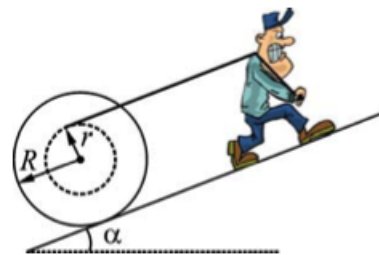
$$m g \approx v \sin \beta m + \frac{T}{\cos \alpha} = \frac{T}{\cos \alpha} \sin \alpha = \frac{T \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{T \tan \alpha}{1} = v$$

Задача 19. (МОШ, 2006, 9) Находясь на вершине ледяной горки, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, школьник бросил снежок под углом  $\beta = 70^\circ$  к горизонту и в этот же момент начал спускаться без начальной скорости с этой горки на санках. Через некоторое время снежок попал в школьника. Найдите коэффициент трения между полозьями санок и льдом.



$$m g \approx (g + v) \sin \alpha = \mu$$

Задача 20. (МОШ, 2013, 9) Рабочий катит катушку с канатом вверх по плоской горке, образующей угол  $\alpha \approx 6^\circ$  с горизонтом, одновременно разматывая канат (см. рисунок). Внешний радиус катушки равен  $R = 60$  см, внутренний —  $r = 40$  см, а масса катушки с канатом равна  $m = 100$  кг. Катушка катится без проскальзывания и делает один полный оборот за время  $t = 4$  с, причём её центр движется равномерно. С какой скоростью идёт рабочий? Какой выигрыш в силе он получает при таком подъёме? С какой силой он тянет за конец каната? Какую полезную мощность он развивает? Массой размотанного участка каната пренебречь, считать  $\sin 6^\circ \approx 0,10$ .

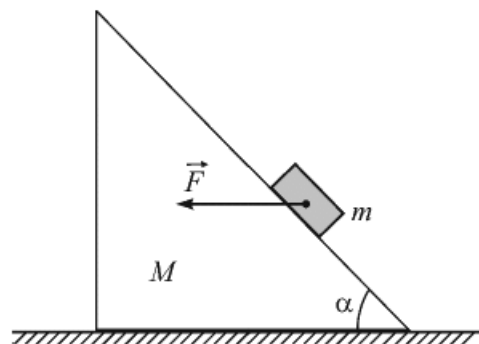


$$v \approx 1,6 \text{ м/с}; N \approx 60 \text{ Н}; \frac{v}{R} = \frac{v}{0,6} = \frac{v}{0,4} \Rightarrow v \approx 1,6 \text{ м/с}; \text{ выигрыш в силе } \approx \frac{R}{r} = 1,5; F \approx 1,5 \cdot 100 \cdot 0,1 = 15 \text{ Н}; P \approx 15 \cdot 1,6 = 24 \text{ Вт}$$

Задача 21. (МОШ, 2008, 9) На станции глубокого заложения в Московском метрополитене длина эскалатора равна  $L = 100$  м, угол его наклона к горизонту равен  $\alpha = 22,5^\circ$ , а скорость движения составляет  $v = 1,2$  м/с. Какова должна быть минимальная мощность электромотора, приводящего в движение эскалатор, чтобы в «час пик», когда эскалатор плотно заполнен людьми, этот мотор мог справиться с нагрузкой при движении вверх? Считать, что люди в среднем имеют массу  $m = 70$  кг и располагаются в два ряда на среднем расстоянии друг от друга (по горизонтали)  $l = 50$  см, а КПД механической части эскалатора равен  $\eta = 0,7$ .

$$N_{\text{min}} = \frac{m g L v \sin \alpha}{\eta} \approx \frac{70 \cdot 10 \cdot 100 \cdot 1,2 \cdot \sin 22,5^\circ}{0,7} \approx 170 \text{ кВт}$$

Задача 22. (МОШ, 2016, 9–10) Клин массой  $M = 5$  кг с углом при основании  $\alpha = 45^\circ$  расположен на гладком горизонтальном столе. На наклонной поверхности клина лежит брусок массой  $m = 1$  кг. На брусок начинает действовать сила, направленная горизонтально в сторону клина. Модуль этой силы возрастает с течением времени  $t$  по закону  $F = \delta t$ , где коэффициент пропорциональности  $\delta = 1$  Н/с. Коэффициент трения между клином и бруском равен  $\mu = 1,2$ .



1) [9–10] Найдите модуль силы трения, действующей со стороны клина на брусок через время  $T = 12$  с после начала действия силы  $F$ , если клин к этому моменту ещё не начал опрокидываться.

2) [10] Найдите ускорения клина и бруска через время  $5T = 1$  мин после начала действия силы  $F$ .

Ускорение свободного падения можно считать равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$F = \delta t = 1 \cdot 12 = 12 \text{ Н}; a = \frac{F}{m} = \frac{12}{1} = 12 \text{ м/с}^2$$

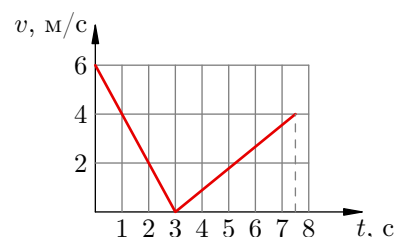
Задача 23. (МФТИ, 1994) По доске, наклонённой к горизонту под углом  $\alpha = \arcsin(1/3)$ , можно передвигать вверх или вниз грузы, прикладывая силу вдоль доски. Чтобы передвинуть ящик массой  $m = 30$  кг вниз на расстояние  $L = 3$  м, надо совершить минимальную работу  $A = 100$  Дж. Какую минимальную работу потребуется совершить, чтобы вернуть по доске этот ящик назад?

$$A_{\text{min}} = m g L \sin \alpha = 30 \cdot 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = 300 \text{ Дж}$$

Задача 24. (МФТИ, 1994) На наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = \arctg(1/4)$  лежит коробка. Чтобы передвинуть коробку вниз по наклонной плоскости на некоторое расстояние, нужно совершить минимальную работу  $A_1 = 15$  Дж. Для перемещения коробки вверх вдоль наклонной плоскости требуется совершить работу не менее  $A_2 = 65$  Дж. В обоих случаях силы к коробке прикладываются вдоль наклонной плоскости. Определить по этим данным коэффициент трения скольжения между коробкой и наклонной плоскостью, если величины перемещений вверх и вниз равны.

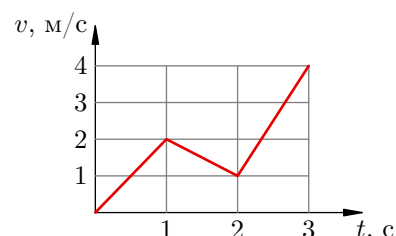
$$\bar{v} \approx v_{\text{ср}} \frac{1V - cV}{cV + 1V} = \eta$$

Задача 25. (МФТИ, 1992) Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а затем возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени приведён на рисунке. Найти угол наклона плоскости к горизонту.



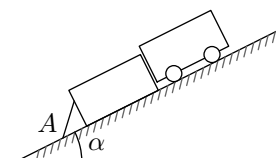
$$v_0 \approx \frac{0.6}{g} \text{ м/с}^2 = \frac{6\tau}{\sin \alpha + \cos \alpha} \text{ м/с}^2 = v$$

Задача 26. (МФТИ, 1992) По плоскости с углом наклона к горизонту  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 4/9$ ) соскальзывает брусок. Коэффициент трения скольжения  $\mu$  между бруском и плоскостью меняется вдоль плоскости. График зависимости скорости бруска от времени представлен на рисунке. Найти минимальное значение  $\mu$ .



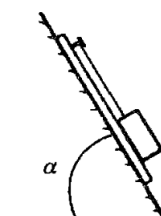
$$\mu_{\text{min}} \approx \frac{v \cos \alpha}{v_{\text{max}} - v \sin \alpha} = 0.04$$

Задача 27. (МФТИ, 1991) Тележка и ящик с равными массами удерживаются упором А (см. рисунок) на поверхности горки, наклонённой под углом  $\alpha$  ( $\text{tg } \alpha = 0.4$ ) к горизонту. Упор убирают, ящик и тележка приходят в движение. Во сколько раз при этом уменьшается сила давления тележки на ящик? Коэффициент трения скольжения между ящиком и поверхностью горки  $\mu = 0.2$ . Соприкасающиеся поверхности стенок ящика и тележки считать гладкими и расположенными перпендикулярно поверхности горки.



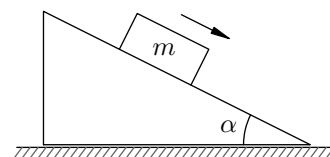
$$\bar{v} = \frac{\eta}{v_{\text{ср}} \tau}$$

Задача 28. (МФТИ, 1991) На наклонной плоскости (см. рисунок) с углом наклона  $\alpha = 60^\circ$  неподвижно удерживают доску. На верхней гладкой поверхности доски лежит брусок, прикрепленный с помощью нити к гвоздю, вбитому в доску. Нить параллельна наклонной плоскости. Если доску отпустить, то она начнёт скользить по наклонной плоскости, и сила натяжения нити уменьшается в 10 раз. Найти значение коэффициента трения скольжения между доской и наклонной плоскостью.



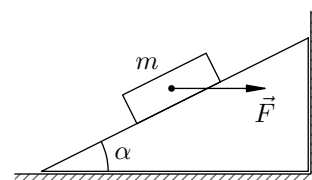
$$\Delta \Gamma \approx \frac{0.1}{v_{\text{ср}} \tau} = \eta$$

Задача 29. (МФТИ, 1995) Призма находится на горизонтальной поверхности шероховатого стола (см. рисунок). На поверхность призмы, наклонённую под углом  $\alpha$  к горизонту, положили брусок массой  $m$  и отпустили. Он стал соскальзывать, а призма осталась в покое. Коэффициент трения скольжения между бруском и призмой равен  $\mu$ . Найти силу трения между призмой и столом.



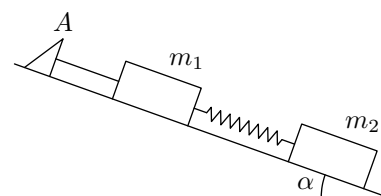
$$\mu \cos \alpha - \mu \sin \alpha = f$$

Задача 30. (МФТИ, 1995) Призма находится на горизонтальной поверхности гладкого стола и упирается в гладкую стенку (см. рисунок). На гладкую поверхность призмы, наклонённую под углом  $\alpha$  к горизонту, положили шайбу массой  $m$  и стали давить на неё с постоянной горизонтальной силой  $F$ . Найти силу давления призмы на стенку при движении шайбы вверх.



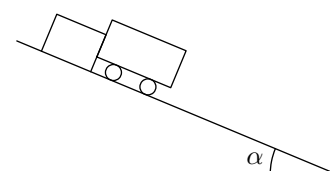
$$\mu \sin \alpha (\mu \cos \alpha + \mu \sin \alpha) = N$$

Задача 31. (МФТИ, 1995) Бруски с массами  $m_1$  и  $m_2$  соединены невесомой пружиной (см. рисунок) и прикреплены с помощью лёгкой нити к упору  $A$ , закреплённому на гладкой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$ . Система покоится. Найти силу натяжения нити. Найти ускорение (направление и модуль) бруска с массой  $m_1$  сразу после пережигания нити.



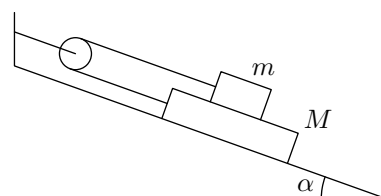
$$L = \frac{m_1 m_2 g \sin \alpha}{m_1 + m_2}$$

Задача 32. (МФТИ, 1996) На наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$  удерживаются неподвижно тележка и брусок, расположенные рядом (см. рисунок). Их отпускают. Какое расстояние будет между тележкой и бруском к моменту, когда тележка пройдёт расстояние  $L = 50$  см? Коэффициент трения скольжения между бруском и наклонной плоскостью  $\mu = 0,3$ . Массу колёс тележки и трение качения не учитывать.



$$p \approx 0,26 L$$

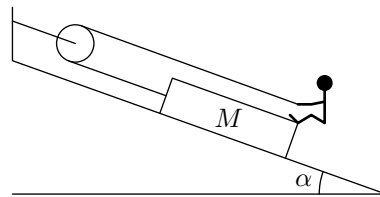
Задача 33. (МФТИ, 1998) К концам троса, перекинутого через блок, привязаны бруски с массами  $m$  и  $M = 4m$ , находящиеся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha = 30^\circ$  (см. рисунок). При каком минимальном значении коэффициента трения  $k$  между брусками они будут покоиться?



$$k = \frac{m}{M} \approx 0,25$$

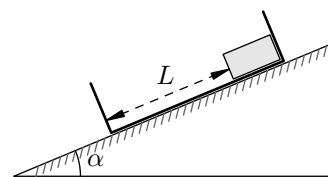


ЗАДАЧА 34. (МФТИ, 1998) Человек массой  $m$ , упираясь ногами в ящик массой  $M$ , подтягивает его с помощью каната, перекинутого через блок, по наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  (см. рисунок). С какой минимальной силой надо тянуть канат человеку, чтобы подтянуть ящик к блоку? Коэффициент трения скольжения между ящиком и наклонной плоскостью равен  $k$ . Части каната, не соприкасающиеся с блоком, параллельны наклонной плоскости. Массами блока и каната пренебречь.



$$(v \cos \varphi + v \sin \varphi) b \frac{\tau}{u+V} = \mathcal{L}$$

ЗАДАЧА 35. (МФТИ, 2001) Ящик с шайбой удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту  $\alpha = 30^\circ$  (см. рисунок). Ящик и шайбу одновременно отпускают, и ящик начинает скользить по наклонной плоскости, а шайба — по дну ящика. Через время  $t = 1$  с шайба ударяется о нижнюю стенку ящика. Коэффициент трения скольжения между шайбой и ящиком  $\mu_1 = 0,23$ , а между ящиком и наклонной плоскостью  $\mu_2 = 0,27$ . Масса ящика вдвое больше массы шайбы.

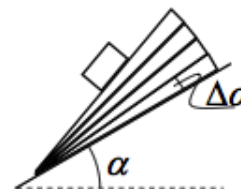


1) Определить ускорение шайбы относительно наклонной плоскости при скольжении шайбы по ящику.

2) На каком расстоянии  $L$  от нижней стенки ящика находилась шайба до начала движения?

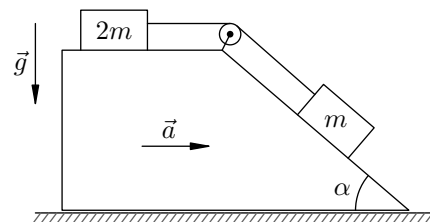
$$m_0 g z = v \cos \varphi b (v t - \tau t) \frac{v}{\xi} = \mathcal{L} \quad (z : \tau^2 / m \text{ } \xi^2 z \approx (v \cos \varphi t - v \sin \varphi) b = v \quad (1$$

ЗАДАЧА 36. («Росатом», 2013, 11) На наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, лежит стопка из 10 одинаковых по форме клиньев с малым углом  $\Delta\alpha$  при вершине (см. рисунок; клинья нарисованы не все). По поверхности верхнего клина скользит тело массой  $M$ . Найти силу, действующую на наклонную плоскость со стороны стопки клиньев, если известно, что все они покоятся, а трение между поверхностями отсутствует.



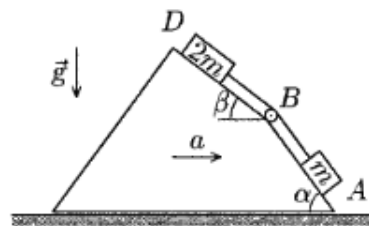
$$M g \frac{v \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 20 \Delta \alpha} b N = \mathcal{L}$$

ЗАДАЧА 37. (МФТИ, 2004) Бруски с массами  $m$  и  $2m$  связаны лёгкой нитью, перекинутой через блок, и находятся на наклонной и горизонтальной поверхностях призмы (см. рисунок). Угол наклона к горизонту одной из поверхностей призмы равен  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 3/5$ ). Коэффициент трения скольжения бруска о горизонтальную поверхность  $\mu = 1/6$ , а о наклонную поверхность —  $2\mu$ . При перемещении призмы с некоторым минимальным горизонтальным ускорением  $a$  брусок с массой  $2m$  начинает скользить по призме влево при натянутой нити. Найти отношение  $a/g$ , где  $g$  — ускорение свободного падения. Трением в оси блока пренебречь.



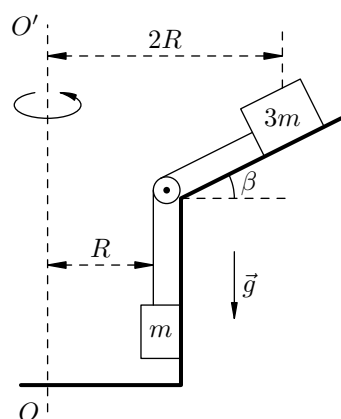
$$\frac{31}{9} = \frac{v \cos \alpha + v \sin \alpha \tau z - \tau}{2 \tau (1 + \cos \alpha) + \sin \alpha} = \frac{b}{v}$$

ЗАДАЧА 38. (МФТИ, 2004) Грузы с массами  $m$  и  $2m$  связаны лёгкой нитью, перекинутой через блок, и находятся на наклонённых под углами  $\alpha$  ( $\sin \alpha = 4/5$ ) и  $\beta = 90^\circ - \alpha$  к горизонту поверхностях горки (см. рисунок). Поверхность  $BD$  гладкая, коэффициент трения скольжения груза о поверхность  $AB$  равен  $\mu = 1/3$ . С каким минимальным горизонтальным ускорением  $a$  надо двигать горку, чтобы груз массой  $2m$  поднимался вверх по поверхности  $BD$ ? Трением в оси блока пренебречь.



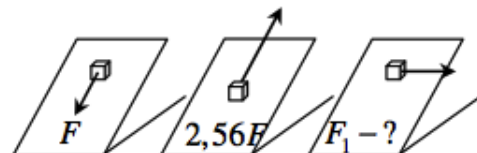
$$g \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = g \frac{v \sin \alpha + v \cos(\pi - \alpha)}{v \sin \beta + v \cos(\pi + \alpha)} = v$$

ЗАДАЧА 39. (МФТИ, 2004) Небольшие бруски с массами  $m$  и  $3m$  связаны лёгкой нитью, перекинутой через блок (см. рисунок). Брусок массой  $3m$  удерживают на гладкой наклонённой под углом  $\beta$  ( $\cos \beta = 3/5$ ) к горизонту поверхности чаши. Коэффициент трения скольжения между бруском массой  $m$  и вертикальной стенкой чаши равен  $\mu = 2/5$ . Чаша с брусками может вращаться вокруг вертикальной оси  $OO'$ . Бруски находятся на расстояниях  $R$  и  $2R$  от оси  $OO'$ . Нить и бруски лежат в плоскости, перпендикулярной поверхности чаши. При какой минимальной угловой скорости вращения брусок массой  $m$  начнёт двигаться вверх, если второй брусок не удерживать? Трением в оси блока пренебречь.



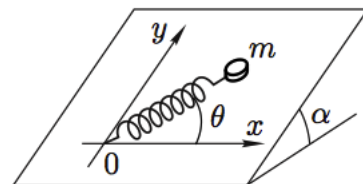
$$\frac{\mu g R}{b L} \Lambda = \frac{\mu}{b} \frac{r - g \sin \alpha}{g \sin \alpha + 1} \Lambda = m$$

ЗАДАЧА 40. («Росатом», 2012, 11) Чтобы тело, покоящееся на наклонной плоскости, двигалось, к нему надо приложить минимальную силу  $F$ , направленную параллельно плоскости вниз, или минимальную силу  $2,56F$ , направленную параллельно плоскости вверх. Какую минимальную силу  $F_1$ , направленную параллельно плоскости горизонтально, нужно приложить к телу, чтобы оно начало двигаться?



$$J'g' = Jg$$

ЗАДАЧА 41. (Всеросс., 2008, финал, 10) На наклонной плоскости находится небольшая шайба массы  $m$  (рис.). К шайбе прикреплен один конец лёгкой пружины жёсткости  $k$  и длины  $L$  (в недеформированном состоянии). Другой конец пружины закреплён в некоторой точке  $O$ . Угол  $\alpha$  наклона плоскости и коэффициент трения  $\mu$  шайбы о плоскость связаны соотношением  $\tan \alpha = \mu$ .



Определите области, в которых шайба находится в состоянии равновесия, их границы и изобразите их качественно на плоскости  $xy$  в двух случаях:

- 1) пружина подчиняется закону Гука как при растяжении, так и при сжатии;
- 2) пружина подчиняется закону Гука только при растяжении (например, пружина заменена лёгкой резинкой).

Задача 42. (МОШ, 2006, 11) На закреплённой наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, удерживают лёгкий лист бумаги. На него положили большой деревянный брусок. С каким ускорением начал двигаться брусок, когда брусок и бумагу отпустили? Коэффициент трения между бруском и бумагой  $\mu_1$ , между бумагой и наклонной плоскостью —  $\mu_2$ .

$$\left. \begin{array}{l} (v_1 + \mu_1) \sin \alpha = \mu_2 \cos \alpha : \\ \mu_1 < \mu_2 \\ \mu_1 > \mu_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{если} \\ \text{если} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{если} \\ \text{если} \end{array} \right\} = a$$