Движение жидкости

В задачах, связанных с движением жидкости, обычно предполагается, что жидкость является несжимаемой. Это означает, в частности, следующее. Предположим, что жидкость течёт по трубе переменного сечения. Пусть на участке трубы с площадью поперечного сечения S_1 жидкость движется со скоростью v_1, а на участке сечением S_2 — со скоростью v_2. За время Δt через сечение S_1 проходит объём жидкости, равный $S_1 \cdot v_1 \Delta t$, а через сечение S_2 — объём $S_2 \cdot v_2 \Delta t$; и поскольку жидкость несжимаема, то *эти объёмы в точности равны друг другу*:

$$S_1 \cdot v_1 \Delta t = S_2 \cdot v_2 \Delta t,$$

или, сокращая на Δt,

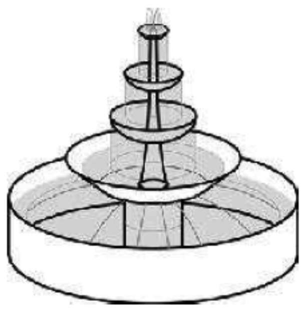
$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Последнее соотношение всегда нужно иметь в виду при решении задач.

Задача 1. (*Всеросс., 2015, МЭ, 9*) Газон поливают из шланга, направляя струю под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определите диаметр d струи в верхней точке траектории, если внутренний диаметр шланга равен $d_0 = 1$ см, а струя в процессе движения не распадается на капли. Считать, что диаметр шланга много меньше высоты подъёма.

$d = \frac{d_0}{\sqrt{\cos\alpha}} \approx 1{,}4$ см

Задача 2. (*МОШ, 2015, 11*) В фонтан, изображённый на рисунке, по центральной трубке площадью поперечного сечения $S = 50$ см^2 подаётся вода, которая вертикально бьёт из отверстия, расположенного на уровне воды верхнего сосуда, на высоту $h = 20$ см. Три верхних сосуда полностью заполнены водой, которая стекает из одного в другой, переливаясь через края сосудов. Четвёртый сосуд (считая сверху) — это широкая чаша. Чтобы поддерживать в ней почти постоянный уровень воды в течение длительного времени, по периметру чаши у её дна каждые $\tau = 2$ мин на некоторый промежуток времени открываются горизонтальные трубки общей площадью $S_0 = 900$ см^2. Из этих трубок вода бьёт на расстояние $L = 50$ см, считая по горизонтали, и попадает в пятый сосуд, где с помощью сливных каналов поддерживается постоянный уровень воды. Каждый следующий уровень воды расположен ниже предыдущего на $H = 45$ см (расстояния измеряются между поверхностями воды). Какую скорость имеет вода при попадании в третий сосуд? На какой промежуток времени открываются горизонтальные трубки через каждые 2 минуты? Сопротивлением воздуха и вязкостью воды можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

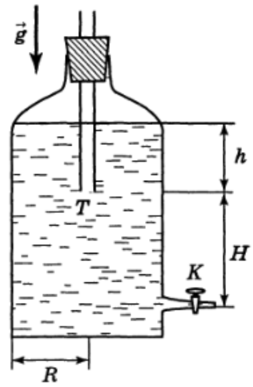


$v = \sqrt{2gH} = 3$ м/с; $t = \frac{2S\sqrt{Hh}}{S_0 L}\tau = 8$ с

Задача 3. (*«Курчатов», 2016, 10–11*) Полностью заполненная водой ванна с вертикальными боковыми стенками освобождается от воды через открытое сливное отверстие в её горизонтальном дне за время τ. Отверстие расположено в середине дна, и его площадь во много раз меньше площади поперечного сечения ванны. При открытом сливном отверстии вода свободно (без труб) выливается на пол. Если в ванну сначала насыпать до краёв мелкую гальку, а затем заполнить ванну водой, то в этом случае ванна опорожняется за время $\tau/2$. При этом камешки гальки не закрывают сливного отверстия! Через какое время опорожнится ванна, если 75% гальки убрать (то есть оставшиеся камушки будут находиться в нижней четверти ванны) и снова заполнить её водой до краёв? Вязкостью воды можно пренебречь. При решении задачи считайте, что камешки гальки уменьшают площадь поперечного сечения ванны, доступную для воды.

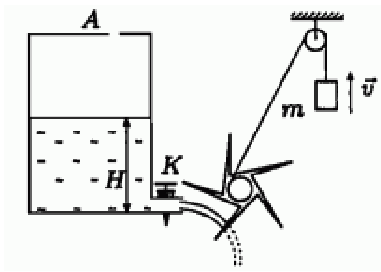
$\boxed{\frac{3}{4}\tau}$

Задача 4. (*Всеросс., 1998, ОЭ, 10*) Герметичный сосуд полностью заполнен водой и сообщается с атмосферой через трубку T (рис.). Кран K открывают. За какое время t поверхность воды в сосуде опустится до нижнего края трубки T? Внутренний радиус сосуда $R = 10$ см, внутренний радиус трубки с краном $r = 2$ мм. Расстояние от нижнего конца трубки T до верха сосуда $h = 20$ см, а до трубки с краном — $H = 5$ см. Объёмом трубки T по сравнению с объемом вытекшей за время t воды пренебречь.



$\boxed{t = \frac{R^2 h}{r^2\sqrt{2gH}} \approx 500 \text{ с}}$

Задача 5. (*Всеросс., 2004, финал, 9*) Любознательный ученик 9 класса соорудил на даче модель водяной турбины (рис.). Вода из широкой бочки вытекала через небольшое отверстие площадью $S = 1$ см^2 у дна и попадала на лопасти турбинки. С помощью нити, намотанной на тонкий вал турбины и перекинутой через блок, устройство могло поднимать вверх груз массой $m = 100$ г с некоторой скоростью.



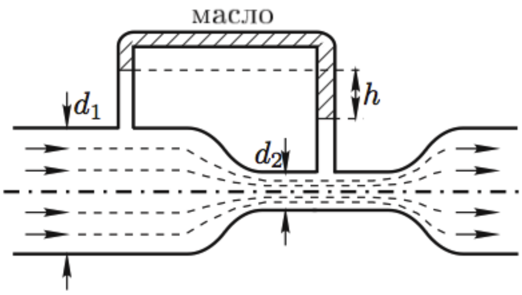
1) Определите коэффициент полезного действия модели водяной турбины, принимая высоту столба воды в бочке $H = 0{,}2$ м, скорость груза $v_1 = 2$ см/с.

2) Выполнив первый эксперимент, ученик перекрыл кран K и герметичной пробкой закрыл отверстие A в крышке бочки. Когда он через некоторое время вернулся, бочка сильно нагрелась на солнце. Открыв кран K (при закрытом отверстии A), ученик с удивлением обнаружил, что его механизм работает более активно, и теперь тот же груз поднимается со скоростью $v_2 = 5$ см/с. Предполагая, что КПД устройства остался неизменным, а уровень воды в бочке по-прежнему $H = 0{,}2$ м, определите, насколько изменилось давление газа в бочке.

Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2

$\boxed{1)\ \eta = \frac{mv_1}{\rho S H\sqrt{2gH}} = 0{,}05;\ 2)\ \Delta p = \frac{\rho}{2}\left(\frac{2mgv_2}{\rho S\eta}\right)^{\frac{2}{3}} - \rho g H = 1600 \text{ Па}}$

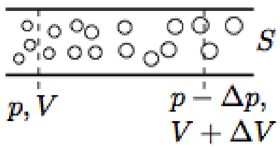
Задача 6. (*Всеросс., 2007, финал, 10*) Для измерения скорости потока воды в отопительной системе используется устройство, изображённое на рисунке (так называемый манометр Вентури). Скорость потока измеряется в трубе с диаметром $d_1 = 2$ см; в месте установки манометра труба сужается до диаметра $d_2 = 0{,}6$ см. В верхней части П-образной манометрической трубки содержится масло с плотностью $\rho_м = 0{,}82$ г/см^3. Вертикальные колена трубки врезаны в широкую и узкую части трубы с текущей водой. Рассматривая воду как идеальную несжимаемую жидкость, определите объём воды, протекающей через трубу в 1 с, если разность уровней воды в вертикальных коленах манометрической трубки $h = 1{,}2$ см. Плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.



Примечание. При течении идеальной несжимаемой жидкости по горизонтальной трубе переменного сечения выполнено $p + \rho v^2/2 = \mathrm{const}$ вдоль всей трубы. Здесь p — давление жидкости, ρ — плотность, v — скорость течения.

$$\boxed{V_t = \frac{\pi}{4} d_1^2 d_2^2 \sqrt{\frac{2(\rho - \rho_м)gH}{\rho(d_1^4 - d_2^4)}} \approx 5{,}9 \text{ см}^3/\text{с}}$$

Задача 7. (*Всеросс., 2016, финал, 10*) В трубе сечения S течёт взвесь — жидкость, переносящая с собой мелкие сжимаемые гранулы (см. рисунок). На участке с давлением p объём отдельной гранулы равен V, а на участке с пониженным давлением $p - \Delta p$ объём гранулы равен $V + \Delta V$. Число гранул, проходящих за единицу времени через любое сечение трубы, равно ν. Найдите массу взвеси μ, проходящую через трубу за единицу времени при стационарном течении, если трения со стенками трубы нет, а скорость жидкости и гранул по всему сечению одинакова. Изменением плотности жидкости пренебречь.



$$\boxed{\mu = \frac{S^2 \Delta p}{\nu \Delta V}}$$