

Магнитный диполь

Причиной написания данного листка послужили две задачи:

- [How are aurora ignited by the solar wind?](#) (APhO, 2015);
- [Space Debris](#) (APhO, 2017).

В обеих задачах фигурирует дипольное магнитное поле Земли. Поэтому хотелось бы подробнее разобраться с формулой для магнитного поля, создаваемого магнитным диполем.

Магнитный диполь — это маленький плоский виток с током; размеры витка много меньше расстояния, на котором наблюдается его магнитное поле.

Магнитный диполь оказывается аналогом [электрического диполя](#): вы сейчас увидите, что формулы, описывающие магнитное поле витка или воздействие внешнего магнитного поля на виток, имеют тот же самый вид, что и соответствующие формулы для электрического поля диполя или действия внешнего электрического поля на диполь (с заменой дипольного момента на магнитный момент, а электрического поля — на магнитное).

Для начала вспомним один из основных законов магнитостатики, а именно закон Био — Савара — Лапласа.

Закон Био — Савара — Лапласа. Пусть есть тонкий провод, по которому течёт ток I . Рассмотрим бесконечно малый элемент провода длиной dl и будем воспринимать его как вектор $d\vec{l}$, направление которого совпадает с направлением тока. Тогда вектор магнитной индукции $d\vec{B}$, создаваемый этим элементом, равен

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

где \vec{r} есть радиус-вектор, проведённый от нашего элемента провода в точку наблюдения.

Задача 1. Найдите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечного прямого провода, по которому течёт ток I .

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ где } r \text{ — расстояние до провода}$$

Задача 2. По кольцу радиуса R течёт ток I . Определите индукцию магнитного поля в центре кольца и на его оси на расстоянии h от центра кольца.

$$B(0) = \frac{\mu_0 I}{R}, \quad B(h) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}$$

Задача 3. Во сколько раз уменьшится индукция магнитного поля в центре кольца с током, если его согнуть под углом α ? Ток в кольце не меняется.

$$B = B_0 \sin \frac{\alpha}{2}$$

ЗАДАЧА 4. Пусть имеется плоский контур с током I . Нас интересует магнитное поле \vec{B} этого тока в некоторой точке P плоскости контура.

- Покажите, что вектор \vec{B} перпендикулярен плоскости контура.
- Пусть контур задан уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат с началом P . Покажите, что $|d\vec{l} \times \vec{r}| = r^2 d\varphi$, и поэтому закон Био — Савара — Лапласа примет вид

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\varphi.$$

ЗАДАЧА 5. [Овчинкин] — 5.1, 5.2, 5.3.

Теперь, пользуясь законом Био — Савара — Лапласа, мы хотим получить выражение для индукции магнитного поля, создаваемого магнитным диполем:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right), \quad (1)$$

где $\vec{\mu}$ — магнитный момент диполя. Она полностью аналогична формуле для напряжённости электрического поля, создаваемого электрическим диполем:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right), \quad (2)$$

получать которую вы умеете (листок «**Электрический диполь**»). Однако аналогичный «лобовой» вывод формулы (1) наталкивается на некоторые технические трудности, поэтому мы используем обходной манёвр, который полезно предварительно осмыслить на примере альтернативного вывода формулы (2).

ЗАДАЧА 6. Прочитайте в Сивухине §4 «Электрический диполь» (с. 22 — 26). Детально разберитесь с выводом формулы (2).

Теперь нам предстоит применить аналогичную идею в магнитном случае¹. Рассмотрим прямоугольный контур со сторонами a и b , по которому течёт ток I . Точка наблюдения находится на расстоянии $r \gg a, b$ от контура. Для краткости обозначаем $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$ (по аналогии с электростатикой).

ЗАДАЧА 7. Пусть точка наблюдения P расположена на прямой, проходящей через центр O прямоугольника перпендикулярно его плоскости (то есть на оси магнитного момента). Найдите поля, создаваемые всеми четырьмя сторонами прямоугольника. Сложив их, покажите, что

$$\vec{B} = \frac{2k\vec{\mu}}{r^3}.$$

¹В Сивухине этого уже нет, поэтому настраивайтесь на самостоятельную работу.

ЗАДАЧА 8. Пусть точка наблюдения Q находится в плоскости контура на продолжении средней линии прямоугольника. Найдите поля, создаваемые всеми четырьмя сторонами. Сложив их, покажите, что

$$\vec{B} = -\frac{k\vec{\mu}}{r^3}.$$

Убедитесь, что если немного «пошевелить» точку Q , то это не повлияет на ответ (достаточно интуитивного понимания данного факта; сравните с замечанием Сивухина сразу после формулы (4.2) на с. 23).

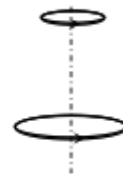
ЗАДАЧА 9. Пусть точка наблюдения лежит в плоскости POQ . Действуя аналогично Сивухину (опуская перпендикуляр на линию наблюдения и помещая в его основание два тока $\pm I$), сведите задачу к двум рассмотренным частным случаям и получите формулу (1).

Обратите внимание, что если у Сивухина равенство $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$ очевидно, то в нашем случае аналогичное равенство $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ ещё надо доказать. Сделайте это.

ЗАДАЧА 10. Рассмотрим теперь произвольный магнитный диполь. Разбивая его нужным образом на маленькие прямоугольники, объясните, почему формула (1) остаётся верной и в общем случае².

ЗАДАЧА 11. Найдите опечатку в формуле (1) условия задачи «[How are aurora ignited by the solar wind?](#)» (APhO, 2015).

ЗАДАЧА 12. («Росатом», 2018, 11) Имеется два кольца с радиусами R и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии d друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I . Найдите силу взаимодействия колец.



$$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi d} \tau I^0 \tau \mu_0 = \mathcal{J}$$

ЗАДАЧА 13. [Овчинкин] — 5.17, 5.18, 5.19. Обратите внимание на содержательное сходство этих задач и задания С.1 из «[Space Debris](#)» — везде нужно вычислять интегрированием магнитный момент непрерывного распределения токов.

ЗАДАЧА 14. Магнитный диполь расположен во внешнем *однородном* магнитном поле \vec{B} .

- Покажите, что на диполь действует вращающий момент

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

Убедитесь, что этот вращающий момент стремится совместить магнитный момент по направлению с внешним полем \vec{B} .

- Покажите, что потенциальная энергия магнитного диполя

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

если за ноль принять энергию диполя в положении, когда магнитный момент перпендикулярен полю.

²Формулу (1) принято выводить дифференцированием векторного потенциала (см., например, [Фейнмановские лекции по физике](#), с. 287 — 290). Но вы, наверное, пока не знаете, что такое векторный потенциал, поэтому здесь мы попробовали обойтись законом Био — Савара — Лапласа.

ЗАДАЧА 15. Найдите частоту крутильных колебаний магнитного диполя в однородном магнитном поле B . Момент инерции диполя относительно оси вращения равен J .

$$\frac{r}{a^3} \Lambda = \sigma$$

ЗАДАЧА 16. Теперь магнитный диполь расположен во внешнем *неоднородном* магнитном поле. Покажите, что со стороны поля на него действует сила

$$\vec{F} = \mu_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} = (\vec{\mu} \cdot \nabla) \vec{B}.$$

Достаточно это сделать для какого-либо простого частного случая.