Магнитное поле токов

В основе учения о магнитном поле лежат два экспериментальных наблюдения: 1) магнитное поле действует на движущиеся заряды; 2) магнитное поле создаётся движущимися зарядами. Первое из них — действие магнитного поля на заряды и токи — это соответственно сила Лоренца и сила Ампера, которые мы изучали в двух предыдущих листках. А сейчас нас будет интересовать второе наблюдение: как найти магнитное поле движущегося заряда или провода с током?

Опыт показывает, что магнитное поле заряда q, движущегося с постоянной скоростью $\vec{v}$, равно

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{1}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, идущий из заряда q в точку наблюдения, а константа $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м называется *магнитной постоянной* (это магнитный аналог электрической постоянной ε_0).

Задача 1. Убедитесь, что формулу (1) можно переписать в виде

$$\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{v} \times \vec{E}, \tag{2}$$

где $\vec{E}$ — электрическое поле, которое создавал бы неподвижный заряд q в той же точке наблюдения.

Задача 2. (*Савченко, 9.2.2*) Найдите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечной заряженной нити с линейной плотностью заряда ρ, если нить движется в продольном направлении со скоростью v.

$\boxed{B = \frac{\mu_0 \rho v}{2\pi r}\text{, где } r \text{ — расстояние до провода}}$

Задача 3. (*Закон Био — Савара — Лапласа*) Пусть есть тонкий провод, по которому течёт ток I. Рассмотрим очень маленький (почти прямолинейный) кусочек этого провода, имеющий длину dl, и будем воспринимать его как вектор $d\vec{l}$, направление которого совпадает с направлением тока. Докажите закон Био — Савара — Лапласа: вектор магнитной индукции $d\vec{B}$, создаваемый этим кусочком, равен

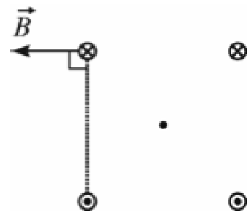
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

где $\vec{r}$ есть радиус-вектор, проведённый от нашего кусочка в точку наблюдения.

Задача 4. (*Савченко, 9.2.3*) Найдите распределение индукции магнитного поля вокруг бесконечного прямого провода, по которому течёт ток I.

$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\text{, где } r \text{ — расстояние до провода}}$

Задача 5. (*МОШ, 2014, 11*) Как показали эксперименты Ж.-Б. Био и Ф. Савара 1820 года, магнитное поле длинного провода с током убывает обратно пропорционально расстоянию от длинного прямого провода. Четыре очень длинных прямых провода с протекающими по ним равными по модулю постоянными токами расположены параллельно друг другу так, как показано на рисунке (сечения проводов плоскостью рисунка находятся в вершинах квадрата). Известно, что модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого одним проводом в соседней с ним вершине этого квадрата, равен B, а поле самого провода на его оси равно нулю.



Найдите модуль B_1 суммарного вектора магнитной индукции в каждой вершине указанного квадрата. Найдите также модуль B_2 вектора индукции магнитного поля в центре этого квадрата.

$B_1 = B\sqrt{\frac{5}{2}}$; $B_2 = 4B$

Задача 6. (*Савченко, 9.2.6*) Длинные прямые провода с током пересекаются под прямым углом. Определите индукцию магнитного поля в точке с координатами x и y, если осями координат служат провода, а ток в проводах I.

$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, если оси вдоль тока

Задача 7. (*Савченко, 9.2.7*) Длинные прямые провода с током пересекаются под углом α. Найдите индукцию магнитного поля на прямой, проходящей через точку пересечения проводов перпендикулярно им обоим. Ток в проводах I.

$B = \frac{\mu_0}{\pi r}\cos\frac{\alpha}{2}$, где α — угол между направлениями токов

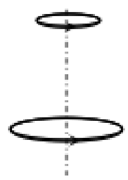
Задача 8. (*Савченко, 9.2.10*) По кольцу радиуса R течёт ток I. Определите индукцию магнитного поля в центре кольца и на его оси на расстоянии h от центра кольца.

$B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$, $B(h) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+h^2)^{3/2}}$

Задача 9. (*«Курчатов», 2016, 11*) В фантастическом фильме описали геофизический эксперимент. Вдоль экватора проложили толстый проводник и по нему пропустили такой ток, что магнитное поле вблизи полюсов Земли стало равным нулю. Найдите силу этого тока. Индукция магнитного поля Земли над полюсами равна $B = 6 \cdot 10^{-5}$ Тл. Радиус Земли $R = 6370$ км. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

$I = 4\sqrt{2}\frac{BR}{\mu_0} \approx 1{,}7 \cdot 10^9$ А

Задача 10. (*«Росатом», 2018, 11*) Имеется два кольца с радиусами R и $2R$, плоскости которых параллельны друг другу. Кольца расположены на очень большом расстоянии d друг от друга так, что их центры лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости колец. В кольцах текут одинаковые токи I. Найти силу взаимодействия колец.



$F = 6\pi\mu_0 I^2 \frac{R^4}{d^4}$

Задача 11. (*Савченко, 9.2.11*) Во сколько раз уменьшится индукция магнитного поля в центре кольца с током, если его согнуть под углом α? Ток в кольце не меняется.

$\boxed{B = B_0 \sin\frac{\alpha}{2}}$

Задача 12. (*Савченко, 9.2.12*) Провод, лежащий в одной плоскости, состоит из двух длинных прямых параллельных участков, связанных полуокружностью радиуса R. По проводу течёт ток I. Определите индукцию магнитного поля в центре полуокружности.

$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)}$

Задача 13. (*Савченко, 9.2.13*) Длинный прямой провод с током I имеет участок в виде полуокружности радиуса R. Определите индукцию магнитного поля в центре полуокружности.

$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4R}}$

Задача 14. (*Савченко, 9.2.14*) Прямой провод имеет виток радиуса R. По проводу течёт ток I. Определите индукцию магнитного поля в центре витка и на его оси на расстоянии h от его центра.

$\boxed{B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \frac{1}{\pi}\right);\ B(h) = \frac{\mu_0 I}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi^2(R^2+h^2)} + \frac{R^4}{(R^2+h^2)^3} + \frac{2R^3}{\pi(R^2+h^2)^{5/2}}}}$

Задача 15. (*Савченко, 9.2.15*) а) Металлическое кольцо разорвалось, когда ток в кольце был I_0. Сделали точно такое же кольцо, но из материала, предел прочности которого в десять раз больше. Какой ток разорвёт новое кольцо?

б) Какой ток разорвёт новое кольцо, сделанное из этого более прочного материала, если все размеры нового кольца в два раза больше размеров старого?

$\boxed{\text{а) } I_1 = I_0\sqrt{10};\ \text{б) } I_2 = I_0\sqrt{40}}$

Задача 16. Имеется плоский контур, который можно самосовместить поворотом на некоторый угол вокруг оси ℓ, перпендикулярной плоскости контура (например, контур является правильным многоугольником). Докажите, что магнитное поле этого контура на оси ℓ на большом расстоянии h от контура равно

$$B = \frac{\mu_0 M}{2\pi h^3}\,,$$

где M — магнитный момент контура.

Теорема о циркуляции

Теорема о циркуляции является магнитным аналогом теоремы Гаусса и относится к фундаментальным утверждениям электродинамики.

Теорема о циркуляции. Пусть Г — произвольный замкнутый контур, пронизываемый током I. Тогда индукция $\vec{B}$ магнитного поля, создаваемого током I, удовлетворяет равенству

$$\oint\limits_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

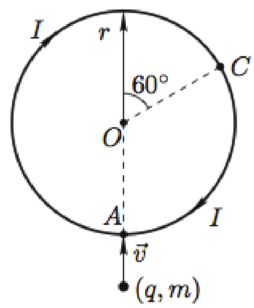
Задача 17. Снова найдите индукцию магнитного поля прямолинейного бесконечного провода с током I на расстоянии r от провода.

Задача 18. Найдите индукцию магнитного поля внутри катушки с током I, если число витков катушки равно N, а длина катушки l. Используйте тот факт, что магнитное поле внутри катушки близко к однородному, а вне катушки вдали от торцов — близко к нулю.

$\boxed{B = \frac{\mu_0 N I}{l}}$

Полученную формулу можно записать также в виде $B = \mu_0 n I$, где $n = N/l$ — плотность намотки витков.

Задача 19. (*Всеросс., 2011, финал, 11*) На рисунке изображено сечение длинной прямой катушки (соленоида), радиус витков которой $r = 10$ см. Число витков катушки на 1 метр длины $n = 500$ м$^{-1}$. По виткам катушки протекает постоянный ток $I = 0{,}1$ А (по часовой стрелке).



Через зазор между витками в точке A в катушку влетает заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 10^3$ В. Скорость частицы в точке A направлена вдоль радиуса соленоида. Частица движется внутри соленоида в плоскости, перпендикулярной его оси, и вылетает из соленоида в точке C, расположенной под углом $\alpha = 60°$ к первоначальному направлению. Определите:

1) знак заряда частицы;

2) радиус кривизны траектории частицы внутри соленоида;

3) удельный заряд частицы (то есть отношение модуля заряда частицы к её массе).

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^7$ (единиц СИ).

$\boxed{\text{1) } q < 0;\ \text{2) } R = r\sqrt{3} \approx 17{,}3 \text{ см};\ \text{3) } \gamma = \frac{2U}{(\mu_0 n I R)^2} \approx 1{,}7 \cdot 10^{11} \text{ Кл/кг (это электрон)}}$

Задача 20. (*APhO, 2000*) **Эффект Стюарта — Толмена.** В 1917 году Стюарт и Толмен обнаружили ток через катушку, намотанную на цилиндр, вращаемый аксиально с определённым угловым ускорением.

Рассмотрим большое количество колец, каждое радиуса r, изготовленных из тонкой металлической проволоки с сопротивлением R. Кольца были одинаковым образом надеты на длинный стеклянный цилиндр, пустой внутри. Их положения на цилиндре зафиксированы приклеиванием колец к цилиндру. Количество колец на единицу длины вдоль оси симметрии равно n. Плоскости колец перпендикулярны оси симметрии цилиндра.

В некоторый момент цилиндр начинает вращательное движение вокруг своей оси симметрии с ускорением α. Найдите величину магнитного поля B в центре цилиндра (по прошествии достаточно долгого времени). Мы полагаем, что электрический заряд e электрона и масса электрона m известны.

$\boxed{B = 2\pi\mu_0 \frac{nmr^2\alpha}{eR}}$

Токи, распределённые по поверхности или объёму

Задача 21. (*Савченко, 9.3.1*) Используя формулу (2), определите индукцию магнитного поля вблизи равномерно заряженной пластины, которая движется со скоростью v вдоль своей плоскости. Поверхностная плотность заряда пластины σ.

$\boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0 v\sigma}$

Задача 22. (*Савченко, 9.3.2*) Найдите индукцию магнитного поля внутри плоского конденсатора, движущегося со скоростью 9 м/с параллельно своим пластинам. Расстояние между пластинами 10 мм, напряжение на них 10 кВ.

$\boxed{B = \mu_0\varepsilon_0 v \frac{U}{d} = 10^{-10}\ \text{Тл}}$

Задача 23. (*Савченко, 9.3.3*) Чему равна индукция магнитного поля бесконечной плоскости, по которой идет ток линейной плотности i?

Примечание. Задачу полезно решить двумя способами: через теорему о циркуляции и с помощью формулы (2).

$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2}}$

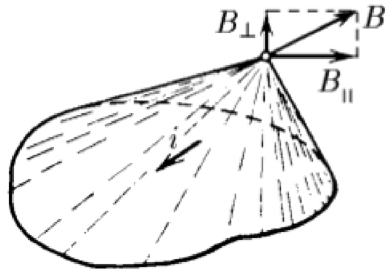
Задача 24. (*Савченко, 9.3.4*) По двум параллельным плоскостям текут в одном направлении токи, линейная плотность которых i_1 и i_2. Определите индукцию магнитного поля между плоскостями и вне их.

$\boxed{B_{\text{in}} = \frac{\mu_0}{2}|i_1 - i_2|,\ B_{\text{out}} = \frac{\mu_0}{2}(i_1 + i_2)}$

Задача 25. (*Савченко, 9.3.5*) По двум параллельным шинам течёт ток I. Ширина шин b много больше расстояния между ними. Чему равна сила, действующая на единицу длины шины?

$\boxed{f = \frac{\mu_0 I^2}{2b}}$

Задача 26. (*Савченко, 9.3.7*) По плоской поверхности, изображённой на рисунке, течёт ток линейной плотности i. Докажите, что составляющая индукции магнитного поля, параллельная поверхности и перпендикулярная направлению i, определяется формулой



$$B_\parallel = \frac{\mu_0 i \Omega}{4\pi},$$

где Ω — телесный угол, под которым видна поверхность.

Указание. Вспомните формулу для $E_\perp$ из листка «Напряжённость электрического поля» и используйте формулу (2).

Задача 27. (*Савченко, 9.3.8*) Используя формулу $B_\parallel = \frac{\mu_0 i \Omega}{4\pi}$, решите следующие задачи.

а) Определите индукцию магнитного поля бесконечно длинной полосы ширины $2h$ в точке над средней линией полосы на расстоянии h от этой линии, если вдоль полосы течёт ток линейной плотности i.

б) Определите индукцию магнитного поля по оси бесконечно длинного цилиндра, по поверхности которого течёт поперечный ток линейной плотности i.

в) По прямому длинному проводнику, сечение которого — правильный треугольник со стороной a, течёт ток плотности j. Определите индукцию магнитного поля на рёбрах проводника.

а) $B = \frac{\mu_0 i}{4}$; б) $B = \mu_0 i$; в) $B = \frac{\mu_0 j a\sqrt{3}}{12}$

Задача 28. (*Савченко, 9.3.15*) С помощью теоремы о циркуляции решите следующие задачи.

а) По бесконечно длинному прямому проводу радиуса r течёт ток I. Ток распределён равномерно по сечению провода. Найдите индукцию магнитного поля внутри и вне провода.

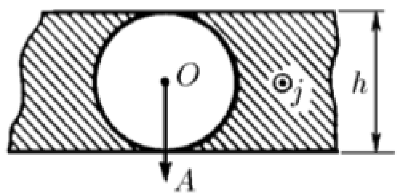
б) По длинной широкой шине с поперечным размером a течёт ток, равномерно распределённый по сечению проводника. Плотность тока j. Как зависит индукция магнитного поля от расстояния x до средней плоскости шины?

а) $B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I x}{2\pi r^2}, & \text{если } x < r, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, & \text{если } x > r \end{cases}$ б) $B = \begin{cases} \mu_0 j x, & \text{если } x < \frac{a}{2}, \\ \mu_0 j \frac{a}{2}, & \text{если } x > \frac{a}{2} \end{cases}$

Задача 29. (*Савченко, 9.3.16*) Через тороидальный соленоид, имеющий N витков, протекает ток I. Внешний радиус тора R, внутренний r. Определите минимальную и максимальную индукцию магнитного поля внутри соленоида.

$B_{\min} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}$, $B_{\max} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$

Задача 30. (*Савченко, 9.3.20*) В бесконечной пластине толщины h вырезали цилиндрическую полость радиуса $h/2$, ось которой параллельна поверхностям пластины. Во всем объёме пластины, за исключением полости, течёт ток, направленный вдоль оси полости. Найдите распределение индукции магнитного поля вдоль прямой OA, которая проходит через ось полости и перпендикулярна поверхностям пластины. Плотность тока j.

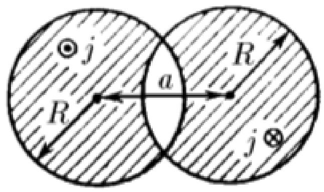


$B = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} j x, & \text{если } x < \frac{h}{2}, \\ \frac{\mu_0}{2} j h \left(1 - \frac{h}{4x}\right), & \text{если } x > \frac{h}{2} \end{cases}$

Задача 31. (*Савченко, 9.3.21*) Определите индукцию магнитного поля в длинной цилиндрической полости, расположенной внутри цилиндрического проводника, если ось полости параллельна оси проводника и отстоит от нее на расстоянии d. Ток распределен равномерно по сечению проводника. Плотность тока j.

$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\vec{j} \times \vec{d}}$

Задача 32. (*Савченко, 9.3.22*) а) Два цилиндра радиуса R, оси которых находятся на расстоянии a друг от друга, пересекаются, как показано на рисунке. Через заштрихованные области вдоль осей в противоположных направлениях текут токи, плотность которых $\pm j$. Найдите индукцию магнитного поля в области, лежащей между заштрихованными областями.



б) Используя результат предыдущей задачи и применяя метод предельного перехода, найдите при $a \to 0$, $j \to \infty$ распределение линейной плотности тока на поверхности цилиндра радиуса R, которое дает однородное внутри цилиндра магнитное поле индукции B_0. Как связана максимальная линейная плотность тока с индукцией поля B_0?

$\boxed{\text{а) } \vec{B} = \frac{\mu_0}{2}\vec{j} \times \vec{a};\ \text{б) } i = \frac{2B_0}{\mu_0}\cos\alpha}$