

## Равновесие рычага

Прочитайте начало статьи «[Простые механизмы](#)» — раздел «Рычаг». Нам понадобятся условия равновесия рычага. Напомним их.

- 1) Силы, приложенные к рычагу, уравновешены.
- 2) Суммарный момент сил, вращающих рычаг в одну сторону, равен суммарному моменту сил, вращающих рычаг в другую сторону (моменты вычисляются относительно любой фиксированной оси).

ЗАДАЧА 1. Невесомый стержень  $AB$  может свободно вращаться вокруг опоры — точки  $O$  такой, что  $AO : OB = 2 : 1$ . В точке  $A$  к стержню подвешивают груз массы  $m$ . Груз какой массы  $m_x$  нужно подвесить в точке  $B$ , чтобы стержень находился в равновесии? С какой силой  $N$  опора будет при этом действовать на стержень?

$$m_x = m, N = 3mg$$

ЗАДАЧА 2. Однородный стержень с прикрепленным на одном из его концов грузом массы  $m$  находится в равновесии в горизонтальном положении, если его подпереть в точке, расположенной на расстоянии  $1/5$  длины стержня от груза. Найдите массу  $M$  стержня.

$$M = \frac{2}{3}m$$

ЗАДАЧА 3. На земле лежит прямолинейная однородная труба массой  $100$  кг. Какую минимальную силу нужно приложить к концу трубы, чтобы приподнять её? Считать  $g = 10$  Н/кг.

$$500 \text{ Н}$$

ЗАДАЧА 4. Два человека несут трубу массой  $80$  кг и длиной  $5$  м. Первый человек удерживает конец трубы, второй держит трубу на расстоянии  $1$  м от противоположного конца. Найдите силу, которую каждый человек прикладывает к трубе. Считать  $g = 10$  Н/кг.

$$F_1 = 300 \text{ Н}, F_2 = 500 \text{ Н}$$

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2015, ШЭ, 8–9) Лёгкая прямая рейка длиной  $100$  см с прикрепленным к ней грузом массой  $1$  кг подвешена за концы: правый конец — на одной вертикальной пружине, левый — на четырёх таких же пружинах (эти четыре пружины тонкие, и поэтому можно считать, что они прикреплены к одной точке). Рейка горизонтальна, все пружины растянуты на одинаковую длину. На каком расстоянии от левого конца рейки находится груз?



$$20 \text{ см}$$

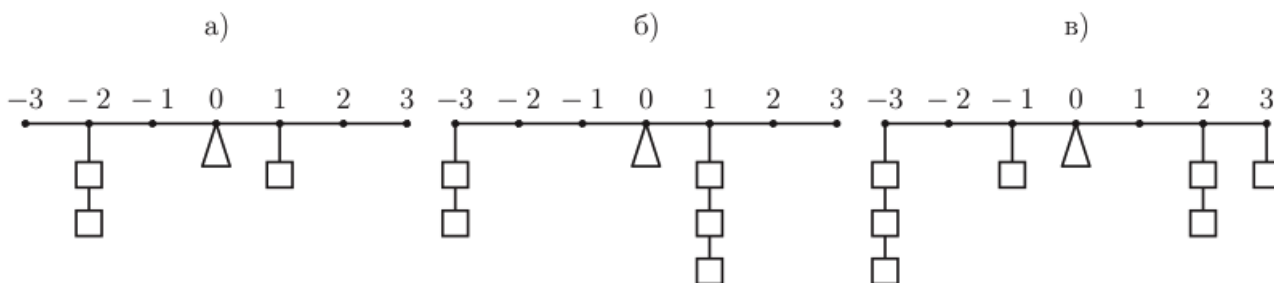
ЗАДАЧА 6. («Росатом», 2014, 8) На неравноплечих весах уравновешены два стакана. Расстояние между центрами стаканов равно  $l$ . Из одного стакана взяли массу воды  $m$  и перелили во второй. Если при этом опору весов передвинуть на  $l/10$ , то равновесие весов восстановится. Найдите массу воды в обоих стаканах.

$$10m$$

ЗАДАЧА 7. (МОШ, 2010, 7) На лёгком горизонтальном рычаге с двумя опорами находятся пустые лёгкие бочки. Расстояние от оси левой бочки до левой опоры  $a = 2$  метра, от оси правой бочки до правой опоры —  $c = 3$  метра, расстояние между опорами  $b = 1$  метр. В обе бочки одновременно начинают наливать с небольшой скоростью воду из разных кранов. Как должны соотноситься скорости  $v_1$  и  $v_2$  наполнения бочек, то есть массы воды, поступающие в единицу времени в каждую бочку, чтобы система оставалась в равновесии?

$$v_2 > v_1 > v_2$$

ЗАДАЧА 8. (МОШ, 2008, 7) На рисунке изображены рычаги, на которых имеются крючки, прикреплённые через одинаковые расстояния. Крючки пронумерованы от  $-3$  до  $3$ , причем  $0$  приходится на середину рычага. К некоторым крючкам прикреплено по несколько грузов одинаковой массы. Имеется ещё один такой же не подвешенный груз. К крючку с каким номером  $n$  его нужно подвесить, чтобы рычаг находился в равновесии? Решите задачу для каждого из трёх случаев, представленных на рисунке.



$$\text{Во всех случаях } n = 3$$

ЗАДАЧА 9. (МОШ, 2014, 8–9) Однородная доска массой  $3$  кг и длиной  $2$  м опирается левым концом на одну пружину, а правым концом — на две такие же пружины. Школьница Ирина хочет разместить на доске маленький груз массой  $m$  таким образом, чтобы доска была горизонтальна.

А) На каком расстоянии от левого конца доски Ирина должна разместить груз массой  $m = 6$  кг? Ответ представьте в сантиметрах и округлите до целых.

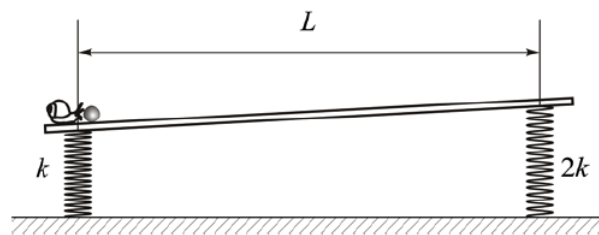
В) При каком минимальном  $m$  Ирина сможет добиться горизонтальности доски? Ответ представьте в килограммах и округлите до десятых.

$$\text{А) } 150; \text{ В) } 1,5$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 2015, МЭ, 8) Школьник Станислав проводит опыт с однородным цилиндром массой  $M = 1$  кг и длиной  $L = 1$  м. Прикрепив при помощи тонких лёгких нитей к одному концу цилиндра гирию массой  $M = 1$  кг, а к другому — груз массой  $3M = 3$  кг, Станислав уравновесил цилиндр на пальце. На каком расстоянии от гири должен находиться палец?

$$70 \text{ см}$$

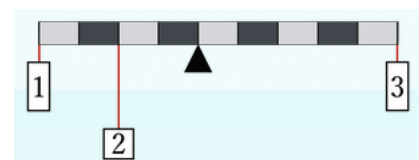
ЗАДАЧА 11. (Всеросс., 2016, МЭ, 8) По длинной прямой однородной палочке слева направо со скоростью  $u$  ползёт маленькая улитка и катит перед собой лёгкий маленький шарик. Масса улитки  $m$ , а палочки —  $M$ . Концы палочки опираются на две вертикальные пружины, расстояние между которыми  $L$ . Жёсткость левой пружины  $k$ , а правой —  $2k$ . Длины пружин в недеформированном состоянии одинаковы, а их нижние концы закреплены на одном горизонтальном уровне. В начальный момент улитка находится на левом крае палочки, над левой пружиной (см. рисунок).



Определите, спустя какое время от начала движения улитки шарик начнёт скатываться по палочке в сторону правой пружины. Можно считать, что жёсткости пружин настолько велики, что угол наклона палочки всегда достаточно мал.

$$\frac{u}{L} \left( \frac{u}{M} + v \right) = ?$$

ЗАДАЧА 12. (Олимпиада Физтех-лицея, 2015, 8) В системе, приведённой на рисунке, масса первого груза равна  $m$ , масса второго в  $a = 2$  раза больше, а масса третьего в  $b = 3$  раза меньше. Масса рычага равна  $M = 18$  кг. Чему равна масса  $m$ , если система находится в равновесии? Ответ выразить в кг, округлив до десятых.

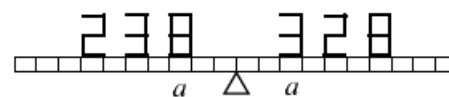


$$? \text{ кг}$$

ЗАДАЧА 13. (МОШ, 2012, 8) Гантель состоит из двух шаров одинакового радиуса массами 3 кг и 1 кг. Шары закреплены на концах однородного стержня массой 1 кг так, что расстояние между их центрами равно 1 м. На каком расстоянии от центра шара массой 3 кг нужно закрепить нить на стержне, чтобы гантель, подвешенная за эту нить, висела горизонтально?

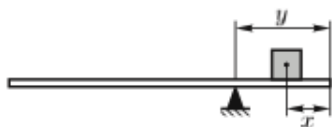
$$? \text{ см}$$

ЗАДАЧА 14. («Росатом», 2018, 8–10) Из 34 одинаковых стержней длиной  $a$  и массой  $m$  изготовлены макеты двух чисел 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры — один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной  $20a$  так, как это показано на рисунке. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на другом конце коромысла весов, чтобы восстановить равновесие?



$$u = ?m$$

ЗАДАЧА 15. (Всеросс., 2010, РЭ, 8) Если груз массы  $m = 10$  г поставить на линейку на расстоянии  $x$  от её края, то линейка примет горизонтальное положение равновесия при размещении под ней упора на расстоянии  $y$  от того же края линейки (см. рисунок внизу).

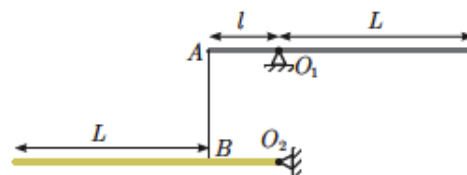


$x$ , мм	$y$ , мм
10	120
30	129
50	137
70	146
90	155
100	160
120	169

Зависимость  $y(x)$  при различных размещении груза представлена в таблице справа. Построив график зависимости  $y(x)$ , определите массу линейки и её длину.

$$M = 12,5 \text{ г}, L = 415 \text{ мм}$$

ЗАДАЧА 16. («Максвелл», 2016, финал, 7) Два однородных стержня одинаковой длины с одинаковой площадью поперечного сечения  $S = 1,0 \text{ см}^2$  могут свободно вращаться вокруг неподвижных горизонтальных осей  $O_1$  и  $O_2$ , расположенных на одной вертикали (рисунок справа). Длина короткого участка каждого стержня  $l = 51 \text{ см}$ , а длинного —  $L = 105 \text{ см}$ . Стержни находятся в равновесии благодаря нити  $AB$ . Верхний стержень изготовлен из стали.



- 1) Какова плотность материала нижнего стержня?
- 2) С помощью таблицы определите, что это за материал.
- 3) Найдите силу  $T$  натяжения нити  $AB$ .

Ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ Н/кг}$ .

металл	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	металл	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	металл	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>
магний	1,74	сталь	7,80	свинец	11,3
алюминий	2,70	никель	8,80	золото	19,3
цинк	7,14	серебро	10,5	платина	21,2

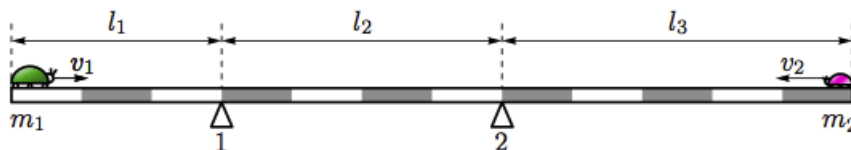
$$M \approx \frac{l^2}{(l-T)(l+T)} S \rho d = L \rho S d \left( \frac{l+T}{l-T} \right) = d \left( \frac{l+T}{l-T} \right) \rho S d$$

ЗАДАЧА 17. («Максвелл», 2017, финал, 7) Однородная соломинка массой  $M = 1$  г лежит горизонтально на двух ветках, которые делят её на участки длиной  $l_1 = 6$  см,  $l_2 = 8$  см и  $l_3 = 10$  см. Два небольших жука с массами  $m_1 = 5$  г и  $m_2 = 2$  г, сидевших на концах соломинки, одновременно начали движение навстречу друг другу со скоростями  $v_1 = 1$  см/с и  $v_2 = 4$  см/с (рис.).

1) Найдите силы реакции веток  $N_1$  и  $N_2$ , которые действовали на соломинку до старта жуков, если  $g = 10$  Н/кг.

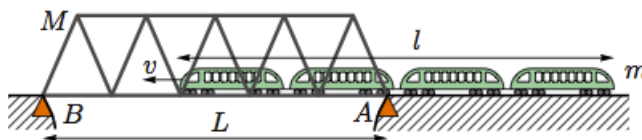
2) Через какое время  $t_k$  после старта соломинка опрокинется, если скольжение между соломинкой и ветками отсутствует?

3) Какой должна быть масса соломинки  $M_0$ , чтобы жуки всё-таки встретились?



$$1) N_1 = 0,1 \text{ Н}; N_2 = 0,1 \text{ Н}; t_k = 0,8 \text{ с}; M_0 = 1,4 \text{ г}$$

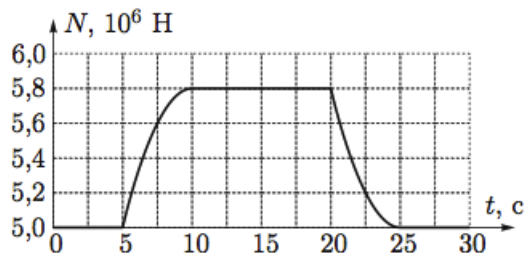
ЗАДАЧА 18. («Максвелл», 2017, финал, 8) Поезд длиной  $l = 210$  м проезжает по мосту со скоростью  $v$ . Под одной из двух опор моста установлен датчик, измеряющий силу реакции опоры  $N$ .



Зависимость показаний датчика от времени  $N(t)$  приведена на рисунке справа. Определите:

- 1) под какой из опор находится датчик;
- 2) массу моста  $M$ ;
- 3) массу поезда  $m$ ;
- 4) длину моста  $L$ ;
- 5) скорость поезда  $v$ .

Мост и поезд считайте однородными,  $g = 10$  Н/кг.



$$1) A; 2) M = 1000 \text{ т}; 3) m = 480 \text{ т}; 4) L = 70 \text{ м}; 5) v = 14 \text{ м/с}$$