

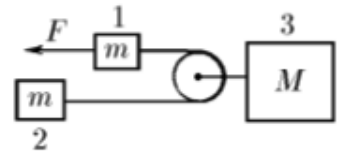
## Кинематические связи в динамике

### Содержание

1	Всероссийская олимпиада школьников по физике . . . . .	2
2	Московская олимпиада школьников по физике . . . . .	3
3	«Покори Воробьёвы горы!» . . . . .	7
4	«Росатом» . . . . .	7
5	«Курчатов» . . . . .	8

В некоторых задачах динамики наряду с законами Ньютона требуются нетривиальные дополнительные соотношения между ускорениями тел — уравнения *кинематической связи*.

**ЗАДАЧА 1.** (Савченко, 2.1.47) Найдите ускорение тел системы, изображённой на рисунке. Сила  $F$  приложена по направлению нити к одному из тел массы  $m$ . Участки нити по обе стороны от лёгкого блока, прикрепленного к телу массы  $M$ , параллельны.

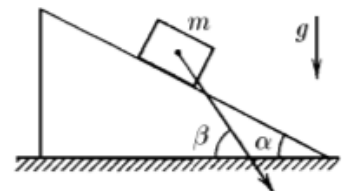


$$\frac{mz + \mathcal{N}}{F} = \varepsilon_D : \frac{(mz + \mathcal{N})\omega z}{\mathcal{N}F} = z_D : \frac{(mz + \mathcal{N})\omega z}{(m\mathcal{V} + \mathcal{N})F} = \tau_D$$

**ЗАДАЧА 2.** Клин массой  $M$  находится на гладкой горизонтальной поверхности. По наклонной поверхности клина, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, соскальзывает без трения брусок массой  $m$ . Найти ускорение клина.

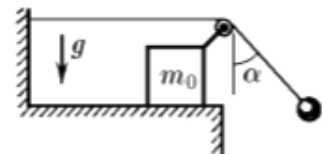
$$\frac{v_z u_{1S} \omega + \mathcal{N}}{v_{S0} \omega v_{1S} u} \beta = \mathcal{V}$$

**ЗАДАЧА 3.** (Савченко, 2.1.50) На гладкой горизонтальной плоскости находится клин с углом  $\alpha$  при основании. Тело массы  $m$ , положенное на клин, опускается с ускорением, направленным под углом  $\beta > \alpha$  к горизонтали. Определите массу клина.



$$\frac{v_{S1} - g_{S1}}{v_{S1}} \omega = \mathcal{N}$$

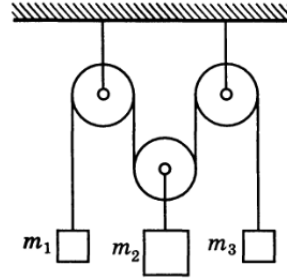
**ЗАДАЧА 4.** (Савченко, 2.1.49) К свободному концу нити, прикрепленной к стенке и переброшенной через ролик, подвешен груз. Ролик закреплен на бруске массы  $m_0$ , который может скользить по горизонтальной плоскости без трения. В начальный момент нить с грузом отклоняют от вертикали на угол  $\alpha$  и затем отпускают. Определите ускорение бруска, если угол, образованный нитью с вертикалью, не меняется при движении системы. Чему равна масса груза?



$$\frac{z(v_{1S} - l)}{v_{1S}} \omega = u : v_{S1} \beta = v$$

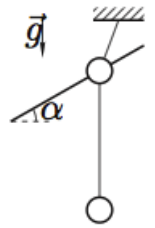
# 1 Всероссийская олимпиада школьников по физике

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 1998, ОЭ, 9) Система грузов (см. рисунок) с массами  $m_1 = m_3 = 10$  кг и  $m_2 = 20$  кг сначала находится в покое, трение отсутствует, а массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Затем к грузу  $m_1$  прикрепили довесок  $\Delta m_1 = 1,25$  кг, к грузу  $m_3$  — довесок  $\Delta m_3 = 5$  кг, и систему предоставили себе самой. В каком направлении и с какими ускорениями станут двигаться грузы?



$$\frac{v}{b} = \varepsilon v; \frac{s}{b} = \varepsilon v; \dot{v} = \varepsilon v; \dot{v} = \varepsilon v$$

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2008, ОЭ, 9) Массивный шарик насажен на стержень, жёстко закреплённый под углом  $\alpha$  к горизонту, и может без трения скользить по нему. К шарiku на лёгкой нерастяжимой нити подвешен точно такой же шарик. Другая нить удерживает верхний шарик на стержне в равновесии (рис.).

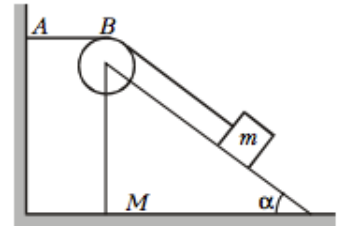


1) С какими ускорениями начнут движение шарики сразу после пережигания верхней нити?

2) Пусть теперь шарики соединены не нитью, а лёгкой пружиной. С какими ускорениями шарики начнут движение в этом случае?

$$0 = q; \dot{v} \text{ и } \dot{z} = v \quad (z; \frac{v}{z} \frac{u+s+1}{u+s} = q; \frac{v}{z} \frac{u+s+1}{u+s} = v) \quad (1)$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 1999, финал, 9) На гладком горизонтальном столе стоит клин массой  $M$  с углом наклона  $\alpha$  при основании (см. рисунок). На поверхности клина находится брусок массой  $m$ , привязанный лёгкой нитью к стене. Нить перекинута через невесомый блок, укреплённый на вершине клина. Отрезок нити  $AB$  параллелен горизонтальной поверхности стола. Вначале систему удерживают, а затем отпускают. При этом брусок начинает скользить по наклонной поверхности клина. Силы трения отсутствуют.

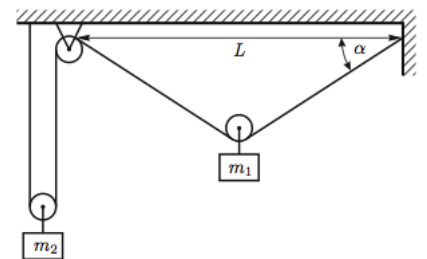


1) Найдите ускорение клина в этом случае.

2) Полагая  $\alpha$  заданным, найдите, при каком отношении масс клина и бруска такое скольжение возможно.

$$\frac{v \cos \alpha}{z(v \cos \alpha - 1)} < \frac{u}{M} \quad (z; \frac{(v \cos \alpha - 1) u z + 1 M}{v u s u} \delta = v) \quad (1)$$

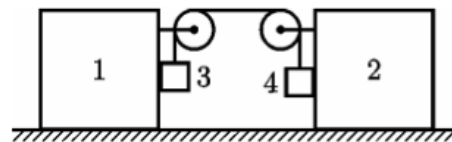
ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2014, РЭ, 10) К двум лёгким подвижным блокам подвешены грузы, массы которых равны  $m_1$  и  $m_2$ . Лёгкая нерастяжимая нить, на которой висит блок с грузом  $m_1$ , образует с горизонтом угол  $\alpha$ . Грузы удерживают в равновесии (см. рисунок). Найдите ускорение грузов сразу после того, как их освободят. Считайте, что радиусы блоков  $r \ll L$ .



$$(\varepsilon \text{ и } \dot{v}) \text{ и } \dot{v} = \varepsilon v; \frac{v}{z} \frac{u+s+1}{u+s} \delta = v$$



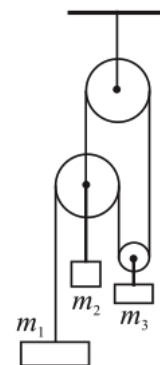
Задача 13. (МОШ, 2007, 9) Найдите ускорение груза 1 в системе, изображённой на рисунке. Массы грузов 1 и 2 равны  $M$ , массы грузов 3 и 4 равны  $m$ . Грузы 3 и 4 касаются грузов 1 и 2, участки нити, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны. Нить невесома и нерастяжима, блоки лёгкие, трения нет.



$$\frac{u\zeta + \nu}{\delta u} = V$$

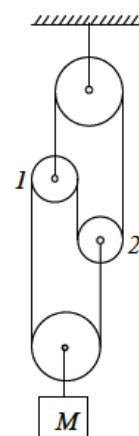
Задача 14. (МОШ, 2009, 9) В системе, показанной на рисунке, неподвижный блок прикреплен к потолку комнаты, а все грузы удерживают неподвижными так, чтобы отрезки лёгкой нерастяжимой нити, не лежащие на блоках, были вертикальны. Грузы массами  $m_2$  и  $m_3$  подвешены к осям блоков на жёстких лёгких стержнях. Все блоки лёгкие и могут вращаться вокруг своих осей без трения. Определите ускорение груза массой  $m_2$  после одновременного отпускания всех грузов. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

$$(\delta < \tau\nu) \delta \frac{\varepsilon u \tau u + \varepsilon u \nu u + \tau u \nu u}{\varepsilon u \tau u + \varepsilon u \nu u + \tau u \nu u} = \tau\nu$$

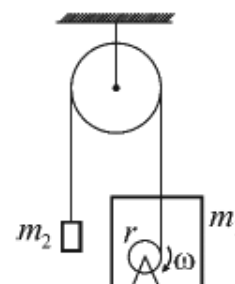


Задача 15. (МОШ, 2016, 9) В системе, изображённой на рисунке, определите ускорения груза и двух одинаковых блоков 1 и 2. Нить невесома и нерастяжима, массы блоков пренебрежимо малы по сравнению с массой груза  $M$ , трения нет. Ускорение свободного падения  $g$  известно.

$$0 = \tau\nu \cdot \delta \zeta = \nu \cdot \delta = \nu$$

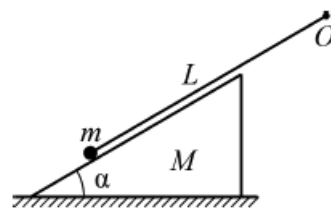


Задача 16. (МОШ, 2016, 9) Невесома нерастяжимая нить перекинута через идеальный блок. К одному концу нити прикреплен груз массой  $m_2$ , а другой конец нити наматывается на невесомую катушку радиусом  $r$ , расположенную внутри ящика массой  $m_1$ . Катушка вращается электродвигателем с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Участки нити, не прилегающие к блоку и катушке, в процессе движения вертикальны, система крепления катушки к ящику и электродвигатель очень лёгкие. Найдите модуль ускорения  $a$  груза  $m_2$ .



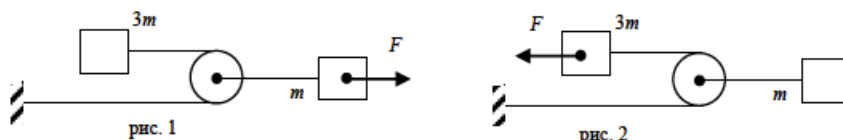
$$\delta \left| \frac{\nu u + \tau u}{\nu u - \tau u} \right| = \nu$$

Задача 17. (МОШ, 2017, 9) На горизонтальной плоскости находится клин массой  $M$ , наклонная поверхность которого образует угол  $\alpha$  с горизонтом. На клине лежит маленький шарик массой  $m$ , который соединён невесомой нерастяжимой нитью длиной  $L$  с неподвижной осью  $O$ , расположенной вне клина. Клин удерживают в таком положении, что нить параллельна наклонной поверхности клина. Трение в системе отсутствует. Клин отпускают, предоставляя системе возможность двигаться. Найдите модули ускорений шарика и клина относительно горизонтальной плоскости в момент сразу после отпущания клина. Нить можно считать очень длинной.



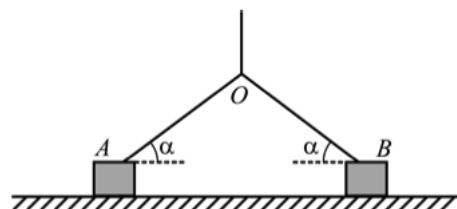
$$\frac{v_{\text{шарика}} \sin \alpha + v_{\text{клина}}}{v \cos \alpha} = v, \quad \frac{v_{\text{шарика}} \sin \alpha + v_{\text{клина}}}{v \sin \alpha} = v$$

Задача 18. (МОШ, 2017, 10) Если приложить силу  $F$  к телу массой  $m$  (рис. 1), то оно начнёт двигаться с ускорением  $a_1 = 0,20 \text{ м/с}^2$ . С каким ускорением  $a_2$  придёт в движение это же тело, если силу  $F$  приложить к телу массой  $3m$  (рис. 2)? Тела находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Массой блока и нерастяжимых нитей можно пренебречь.



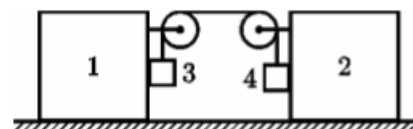
$$a_2/m = 0,4 a_1 = 0,08 \text{ м/с}^2$$

Задача 19. (МОШ, 2011, 10) На горизонтальном столе находятся два одинаковых грузика, связанные невесомой и нерастяжимой нитью, образующей равнобедренный треугольник  $AOB$  (см. рисунок). Углы при основаниях треугольника равны  $\alpha$ . В точке  $O$  к этой нити привязана другая нить, которую удерживают вертикально слегка натянутой. С каким минимальным ускорением нужно начать поднимать точку  $O$ , чтобы грузы оторвались от стола в момент начала своего движения?



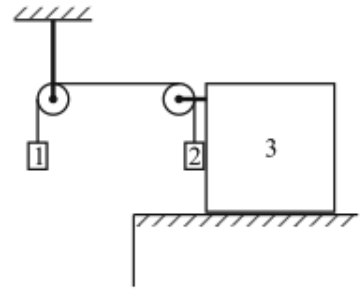
$$a_{\text{точка O}} = \frac{g \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Задача 20. (МОШ, 2007, 10) Найдите ускорения грузов 1 и 2 и силу натяжения нити в системе, изображенной на рисунке. Массы грузов 1, 2, 3 и 4 равны соответственно  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$ . Грузы 3 и 4 касаются грузов 1 и 2, участки нити, не лежащие на блоках, горизонтальны или вертикальны. Нить натянута, невесома и нерастяжима, блоки лёгкие, трение отсутствует.



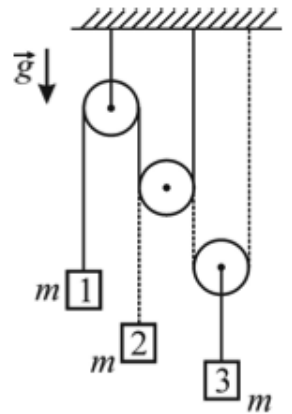
$$(опирая) \frac{a_{m_1} + a_{M_1}}{L} = a, \quad (опирая) \frac{a_{m_2} + a_{M_2}}{L} = a; \quad \frac{a_{m_1} + a_{M_1}}{L} + \frac{a_{m_2} + a_{M_2}}{L} = a$$

Задача 21. (МОШ, 2006, 10) В системе, изображённой на рисунке, массы всех трёх грузов одинаковы и равны  $m$ . Нить, соединяющая грузы 1 и 2, невесома и нерастяжима; её участки, не лежащие на блоках, вертикальны или горизонтальны; блоки невесома, трения нет. Груз 3 движется по горизонтальной плоскости, не опрокидываясь. Найдите ускорения всех трёх грузов. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



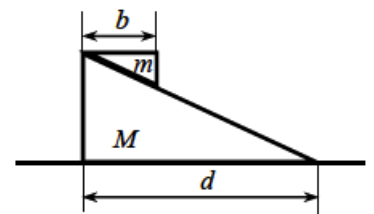
$$\left( \text{оответв} \right) \frac{a}{b^2} = \varepsilon v : \left( \frac{c}{d} \right) \text{справед} = \delta : \left( \varepsilon \text{иния оответв} \right) \frac{e}{f} = \zeta v : \left( \varepsilon \text{иния} \right) \frac{g}{h} = \tau v$$

Задача 22. (МОШ, 2015, 10) Система, показанная на рисунке, состоит из трёх блоков, трёх одинаковых грузов, двух нитей (первая нить показана на рисунке сплошной линией, вторая — пунктирной) и короткой верёвочки. К концу первой нити, перекинутой через средний и левый блоки, прикреплен первый груз массой  $m$ . К концу второй нити, перекинутой через правый и средний блоки, прикреплен второй груз массой  $m$ . Третий груз такой же массой подвешен на верёвочке к оси правого блока. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Все блоки и нити можно считать невесомыми, нити и верёвочку нерастяжимыми, а силы трения пренебрежимо малыми. При вращении среднего блока первая и вторая нити не мешают друг другу. Найдите модули ускорений грузов.



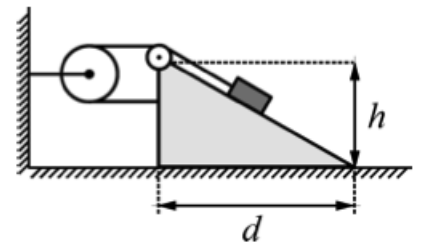
$$\left[ \text{Модули ускорений грузов одинаковы и равны } a = g/3 \right]$$

Задача 23. (МОШ, 2017, 10) Какое расстояние  $S$  пройдёт нижняя призма, когда верхняя коснётся плоскости? Размеры и массы тел указаны на рисунке. В начальный момент система покоилась. Трения нет. Чему равен угол  $\beta$  между направлением вектора абсолютной скорости верхней призмы и горизонталью, если наклонная поверхность нижней призмы образует с горизонтом угол  $\alpha$ ?



$$\left( \text{оответв} \right) \frac{N}{m+N} \text{справед} = g : \frac{m+N}{(q-p)m} = S$$

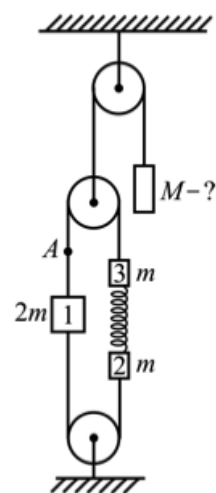
Задача 24. (МОШ, 2012, 10) На гладкой горизонтальной поверхности находится клин с высотой  $h = 30$  см и шириной основания  $d = 40$  см. На его гладкой наклонной плоскости находится маленькая шайба, соединённая с клином при помощи невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через два блока (см. рисунок). Блоки невесома и вращаются без трения, масса клина в  $n = 8$  раз больше массы шайбы. С каким ускорением начнёт двигаться клин после отпускаяния? Ускорение свободного падения считайте равным  $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ . Движение клина — поступательное.



$$\left[ A = g \frac{n+5}{2 \sin \alpha} \approx 6 \frac{49}{9} = 1,2 \text{ м/с}^2 \right]$$

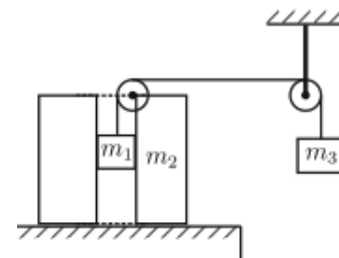
ЗАДАЧА 25. (МОШ, 2011, 10–11) В системе, изображённой на рисунке, все блоки — невесомые и вращаются без трения, все нити — невесомые и нерастяжимые (их жёсткость велика по сравнению с жёсткостью пружины). Пружина также невесома. Система находится в покое. При какой массе груза  $M$  груз 1 сразу после пережигания нити в точке  $A$  будет иметь ускорение большее, чем  $g$ ?

$$mg < M$$



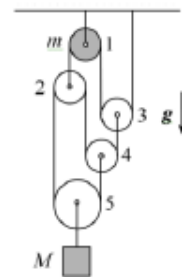
ЗАДАЧА 26. (МОШ, 2006, 11) В системе, изображённой на рисунке, цилиндрический груз массой  $m_1$  движется внутри цилиндрического канала чуть большего диаметра, просверленного внутри тела массой  $m_2$ . Нить, соединяющая грузы  $m_1$  и  $m_3$ , невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Чему равно ускорение груза массой  $m_1$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ , участок нити между блоками горизонтален.

$$\frac{\varepsilon_{\omega} \tau_{\omega} z}{\tau_{\omega} - \varepsilon_{\omega} \tau_{\omega} - \varepsilon_{\omega} \tau_{\omega}} \text{ где } \phi = \frac{\varepsilon_{\omega} \tau_{\omega} + (\varepsilon_{\omega} + \tau_{\omega})(\tau_{\omega} + \tau_{\omega})}{z(\tau_{\omega} - \varepsilon_{\omega} \tau_{\omega} - \varepsilon_{\omega} \tau_{\omega}) + z(\varepsilon_{\omega} \tau_{\omega} z)} \beta = \tau_{\omega}$$



ЗАДАЧА 27. (МОШ, 2016, 11) Найдите величины и направления ускорений осей всех блоков, изображённых на рисунке. Массы бруска и верхнего блока равны соответственно  $M$  и  $m$ . Остальные блоки невесомы, нить также невесома и нерастяжима. Трение в осях блоков пренебрежимо мало. Нити по блокам не проскальзывают, не лежащие на блоках участки нитей вертикальны. В начальный момент система покоилась.

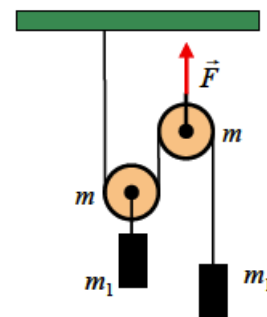
$$\beta = \varepsilon_{\omega} \tau_{\omega} - \varepsilon_{\omega} \tau_{\omega} = \tau_{\omega} \tau_{\omega} = \varepsilon_{\omega} \tau_{\omega} = \tau_{\omega} = \tau_{\omega}$$



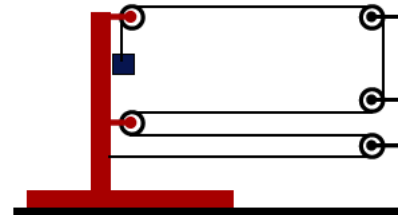
### 3 «Покори Воробьёвы горы!»

ЗАДАЧА 28. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 7–9) Из двух одинаковых цилиндрических роликов массы  $m$ , двух одинаковых грузов массы  $m_1 = 3m$  и лёгкой прочной нерастяжимой нити собрали механическую систему, показанную на рисунке. Один конец нити закреплен на «потолке», ролики не вращаются, нить скользит по роликам без трения. Найти величину силы  $F$ , с которой нужно тянуть вверх ось правого ролика, чтобы левый груз в этой системе двигался с постоянной по величине скоростью. Каким при этом будет ускорение правого груза? Ускорение свободного падения считать известным.

$$(\text{сия}) \beta \frac{\varepsilon}{\tau} = v : \beta \omega \frac{g}{\beta z} = F$$



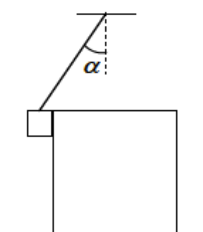
ЗАДАЧА 29. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) Один из концов лёгкой нерастяжимой нити прикреплен к раме массой  $M$ , а на другом подвешен груз массы  $m$ . С помощью системы идеальных блоков и этой нити груз и рама связаны с неподвижной стенкой. Если раму удерживать, то неподвижный груз касается рамы. Трения между грузом и рамой нет, коэффициент трения между рамой и горизонтальной поверхностью равен  $\mu$ . Найти ускорение рамы после отпускания. Ускорение свободного падения  $g$ .



$$\left. \begin{array}{l} \frac{u+V}{u\varphi} < \pi \text{ и } \text{игсэ} \\ \frac{u+V}{u\varphi} \geq \pi \text{ и } \text{игсэ} \end{array} \right\} = V \cdot \left. \begin{array}{l} 0 \\ \cdot \delta \frac{u(\pi\varphi - L) + V\pi}{L\pi - u(\pi - \varphi)} \end{array} \right\}$$

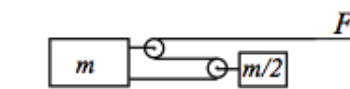
#### 4 «Росатом»

ЗАДАЧА 30. («Росатом», 2016, 9) Тело в форме куба массой  $10m$  удерживают на гладкой горизонтальной поверхности. Второе тело массой  $m$  подвешено к потолку на невесомой нити, составляющей угол  $\alpha$  с вертикалью, и касается куба. Тела отпускают. Найти ускорения тел. Трением пренебречь. Считать, что куб не переворачивается.



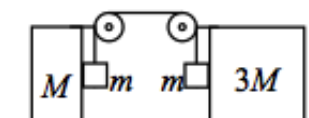
$$\frac{v \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{01+1}{\cos \alpha}}{\cos \alpha} = V \cdot \frac{v \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{01+1}{\cos \alpha}}{\sin \alpha} = v$$

ЗАДАЧА 31. («Росатом», 2011, 9) На гладкой горизонтальной поверхности находятся два тела с массами  $m$  и  $m/2$ . К телам прикреплены невесомые блоки, и они связаны невесомой и нерастяжимой нитью так, как показано на рисунке. К концу нити прикладывают постоянную силу  $F$ . Найти ускорение конца нити.



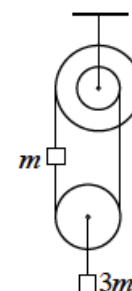
$$\frac{u}{\mathcal{A}L1} = v$$

ЗАДАЧА 32. («Росатом», 2015, 10) На гладком горизонтальном столе находятся два тела с массами  $M$  и  $3M$ . Одинаковые грузы с массой  $m$  ( $m = M/4$ ) связаны невесомой нитью, переброшенной через блоки. Тела отпускают. Найти ускорение тела  $M$ .



$$\delta \frac{vL}{\mathcal{E}1} = v$$

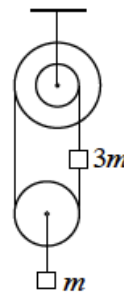
ЗАДАЧА 33. («Росатом», 2017, 10) Блок склеен из двух дисков с радиусами  $R$  и  $2R$ , насаженных на одну и ту же горизонтальную ось, и подвешен к горизонтальному потолку. На блоки намотана невесомая нерастяжимая нить, к которой прикреплён груз массы  $m$ , как это показано на рисунке. Нить охватывает также нижний блок, размеры которого подобраны так, что все отрезки нити вертикальны. Второй груз массы  $3m$  прикреплён к оси нижнего блока. Найти ускорения тел. Блоки невесомы.



$$\frac{61}{\mathcal{B}L} \text{ и } \frac{61}{\mathcal{B}8\mathcal{Z}}$$

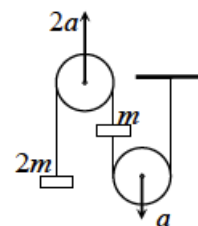


ЗАДАЧА 34. («Росатом», 2017, 11) Блок склеен из двух дисков с радиусами  $R$  и  $2R$ , насаженных на одну и ту же горизонтальную ось, и подвешен к горизонтальному потолку. На блоки намотана невесомая нерастяжимая нить, к которой прикреплен груз массой  $m$ , как это показано на рисунке. Нить охватывает также нижний блок, размеры которого подобраны так, что все отрезки нити вертикальны. Второй груз массой  $3m$  прикреплен к оси нижнего блока. Найти ускорения тел. Блоки невесомы.



$$b \frac{\xi I}{g} \text{ и } b \frac{\xi I}{0I}$$

ЗАДАЧА 35. («Росатом», 2017, 11) В системе двух тел с массами  $m$  и  $2m$ , связанных нерастяжимой и невесомой нитью, второй конец которой прикреплен к потолку, и двух невесомых блоков (см. рисунок), ускорения блоков известны и равны  $a$  и  $2a$ . Какими силами нужно действовать на блоки?



$$F_1 = 24ma + 4mg, F_2 = 28ma + 2mg$$

## 5 «Курчатов»

ЗАДАЧА 36. («Курчатов», 2014, 9) Три одинаковых груза массой  $m$  соединены с помощью идеальных нитей и двух идеальных блоков, как показано на рисунке. Найдите величину и направление ускорения нижнего груза.

$$v = \frac{\xi}{b\zeta}, \text{ направлено вниз}$$

