Законы Кеплера

Содержание

Первый закон Кеплера. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Второй закон Кеплера. Радиус-вектор, проведённый к планете от Солнца, за одинаковые промежутки времени заметает одинаковые площади.

Третий закон Кеплера. Отношение квадрата периода обращения планеты к кубу большой полуоси её эллиптической орбиты есть константа, одна и та же для всех планет.

Цель данного листка — вывести законы Кеплера из законов Ньютона. Заодно мы установим очень красивый и важный факт: если сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния (закон всемирного тяготения или закон Кулона), то частица в поле неподвижного притягивающего центра C может двигаться только по эллипсу, гиперболе или параболе (с фокусом в точке C). Для соответствующего вывода нам понадобятся некоторые математические сведения по кривым второго порядка, с которых мы и начнём наш листок.

Задачи на эллиптическое, гиперболическое и параболическое движение встречаются на заключительном этапе Всероссийской олимпиады школьников по физике, а также на APhO и IPhO. Тут вас могут попросить найти большую или малую полуось эллипса, перифокусное или апофокусное расстояние, эксцентриситет, фокальный параметр, прицельный параметр; в этих случаях вышеупомянутые математические сведения также могут сильно пригодиться[1].

Следует отметить, что теоретический материал данного листка по сложности и широте охвата существенно превосходит тот уровень, который необходим для решения задач международных олимпиад (не говоря уже о Всероссийской). Но если вам удастся этот материал проработать, то вы получите бесценное ощущение полного понимания сложного физического вопроса, когда никакой факт не «свалился с неба» и все связи прослеживаются начиная от базовых принципов. Ну и в качестве приятного бонуса вы обнаружите, что олимпиадные задачи теперь решаются гораздо проще, и более того — что ваши правильные решения могут отличаться от авторских (ведь способность найти альтернативное решение есть следствие глубокого понимания физической сути и свободного владения математическим аппаратом).

[1] Авторское решение олимпиадной задачи обычно оперирует лишь законами Кеплера и физическими соображениями, но если вдруг указанные соображения в голову не приходят, то можно выкрутиться чисто математически. Поэтому полезно знать — как.

1 Эллипс

Воткнём две иголки на расстоянии $2c$ друг от друга и прикрепим к ним нитку длиной $2a > 2c$. Оттянем нитку острым карандашом и прочертим линию, сохраняя нитку натянутой. В результате получится *эллипс*, а иголки — его *фокусы* (смотрите гифку).

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек (фокусов эллипса) есть величина постоянная (бо́льшая расстояния между фокусами).

Задача 1. (*Каноническое уравнение эллипса*) Выберем оси x, y прямоугольной декартовой системы координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 имели координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ соответственно. Для произвольной точки $M(x, y)$ обозначим $r_1 = MF_1$ и $r_2 = MF_2$ (так называемые фокальные радиусы). Пусть $a > c$.

- Покажите, что определение эллипса $r_1 + r_2 = 2a$ приводит к *каноническому уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

  где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ — *малая полуось* эллипса. Величина a называется *большой полуосью*.

- Постройте эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Отметьте его большую и малую полуоси.

Задача 2. Убедитесь, что окружность есть частный случай эллипса.

Задача 3. Покажите, что эллипс является ортогональной проекцией окружности на плоскость. Выведите отсюда формулу площади эллипса: $S = \pi ab$.

Задача 4. Предположим, что один из фокусов эллипса (пусть это будет F_1) нас интересует особо (например, там расположено Солнце). *Перицентр* P есть точка эллипса, ближайшая к этому фокусу; *апоцентр* A — точка эллипса, наиболее удалённая от этого фокуса[2]. Величины $r_p = PF_1$ и $r_a = AF_1$ называются соответственно *перифокусным* и *апофокусным расстоянием*. Выразите эти расстояния через a и c.

$r_p = a - c$; $r_a = a + c$

Задача 5. *Эксцентриситет* эллипса есть величина $e = c/a$. Заметим, что $0 \leqslant e < 1$.
1) Что представляет собой эллипс с нулевым эксцентриситетом?
2) Как меняется эллипс при увеличении эксцентриситета?
3) Выразите b, r_p и r_a через a и e.

1) Окружность; 2) вытягивается; 3) $b = a\sqrt{1-e^2}$; $r_p = a(1-e)$; $r_a = a(1+e)$

Задача 6. *Фокальный параметр* — это половина длины хорды эллипса, проходящей через фокус перпендикулярно прямой F_1F_2 (иными словами, в выбранной выше системе координат это положительная ордината точки эллипса, имеющей абсциссу c). Выразите фокальный параметр p через a и b; через a и e.

$p = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2)$

[2]В случае спутников Земли для этих точек используются названия *перигей* и *апогей*, а при рассмотрении движения планет вокруг Солнца — *перигелий* и *апогелий* (*афелий*).

Задача 7. Покажите, что большая полуось есть среднее арифметическое перифокусного и апофокусного расстояний, малая полуось — их среднее геометрическое, а фокальный параметр — их среднее гармоническое:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2}\,, \qquad b = \sqrt{r_p r_a}\,, \qquad p = \frac{2r_p r_a}{r_p + r_a}\,.$$

Задача 8. Положение точки на плоскости задаётся двумя числами — например, декартовыми координатами (x, y). Во многих случаях удобны *полярные координаты* (r, φ) точки M, где r есть расстояние от M до *полюса* — фиксированной точки O плоскости (то есть длина радиус-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$), а φ — угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и фиксированной осью (так называемой *полярной осью*).

Запишите каноническое уравнение эллипса в полярных координатах, расположив полюс в центре симметрии эллипса и приняв ось x (рассмотренной выше системы координат) в качестве полярной оси.

$\boxed{r = \left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)^{-1/2}}$

Задача 9. Уравнение, полученное в предыдущей задаче, особой роли не играет. Гораздо важнее другое представление эллипса в полярных координатах: полярная ось остаётся той же, полюс помещаем в фокус F_1, а в качестве двух параметров, задающих эллипс, берём фокальный параметр p и эксцентриситет e. Покажите, что уравнение эллипса окажется таким:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}\,.$$

Что изменится в этом уравнении, если в качестве полюса взять F_2?

2 Гипербола

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек M плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 (фокусов гиперболы) есть величина постоянная: $|MF_1 - MF_2| = 2a = \text{const}$.

Задача 10. Положим $F_1F_2 = 2c$. Докажите, что $a < c$.

Задача 11. (*Каноническое уравнение гиперболы*) Опять рассмотрим прямоугольную систему координат, в которой фокусы F_1 и F_2 имеют координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ соответственно.

- Действуя аналогично случаю эллипса, выведите каноническое уравнение гиперболы:

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

  где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Величина a по-прежнему называется *большой полуосью* гиперболы, а вот малой полуоси у неё нет (величина b, как мы увидим ниже, имеет другой геометрический смысл).

- Покажите, что прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются наклонными асимптотами гиперболы.

- Изобразите гиперболу $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача 12. *Эксцентриситетом* гиперболы по-прежнему называется величина $e = c/a$. Заметим, что теперь $e > 1$. Как меняется гипербола при увеличении эксцентриситета?

Задача 13. *Перицентр* есть точка гиперболы, ближайшая к данному фокусу (апоцентр для гиперболы не определён). Расстояние от этого фокуса до перицентра называется *перифокусным расстоянием* и обозначается r_p. Выразите r_p через a и c; через a и e.

$\boxed{r_p = c - a = a(e-1)}$

Задача 14. *Фокальный параметр* — это половина длины хорды гиперболы, проходящей через фокус перпендикулярно прямой F_1F_2 (иными словами, в выбранной выше системе координат это положительная ордината точки гиперболы, имеющей абсциссу c). Выразите фокальный параметр p через a и b; через a и e.

$\boxed{p = \frac{b^2}{a} = a\left(e^2 - 1\right)}$

Задача 15. *Прицельный параметр* — это расстояние от фокуса гиперболы до её асимптоты. Покажите, что прицельный параметр равен b.

Примечание. Физический смысл прицельного параметра состоит в следующем. Пусть комета огибает Солнце по гиперболической траектории (в фокусе которой Солнце как раз и находится). Тогда на бесконечности комета движется вдоль асимптоты, и прицельный параметр есть плечо импульса кометы (относительно Солнца) на бесконечности. Таким образом, момент импульса кометы равен $mv_\infty b$.

Задача 16. (*Уравнение гиперболы в полярных координатах*) Расположим полюс в фокусе F_1, а угол φ будем отсчитывать от *отрицательной* полуоси x (иными словами, полярная ось, как и в случае эллипса, «смотрит» на ближайшую вершину гиперболы). Покажите, что уравнение правой ветви гиперболы в таких полярных координатах идентично уравнению эллипса:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

(но теперь $e > 1$).

3 Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данной прямой (*директрисы*) и данной точки (*фокуса*).

Задача 17. (*Каноническое уравнение параболы*) Пусть расстояние от фокуса до директрисы равно p. Выберем прямоугольную систему координат, в которой фокус имеет координаты $(p/2, 0)$, а директриса, следовательно, задаётся уравнением $x = -p/2$. Выведите каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Нарисуйте параболу $y^2 = 2x$.

Задача 18. Обозначение p выбрано не случайно. Убедитесь, что p есть фокальный параметр параболы (определение фокального параметра тут ничем не отличается от случаев эллипса и гиперболы).

Задача 19. (*Уравнение параболы в полярных координатах*) Расположим полюс в фокусе параболы, а полярную ось направим к её вершине (то есть в сторону отрицательной полуоси x —

как в случае гиперболы). Покажите, что в таких полярных координатах парабола задаётся уравнением

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}\,.$$

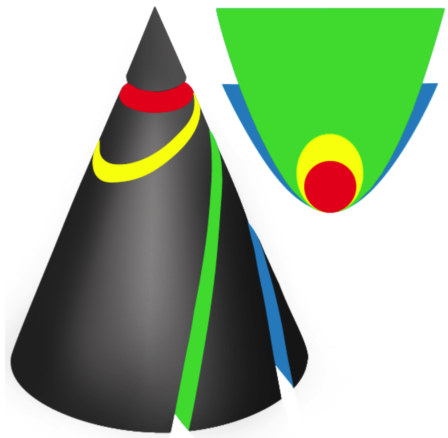
4 Конические сечения

Мы видим, что уравнение параболы в полярных координатах получается из соответствующего уравнения для эллипса или гиперболы, если положить $e = 1$. Таким образом, все три вида кривых второго порядка — эллипс, гипербола и парабола — описываются одним и тем же уравнением

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}\,.$$

При $0 \leqslant e < 1$ это уравнение даёт эллипс, при $e = 1$ — параболу, а при $e > 1$ — гиперболу.

Существует красивая геометрическая интерпретация данного факта. Оказывается, что эллипс, парабола и гипербола — это три вида *конических сечений*, то есть сечений прямого кругового конуса плоскостью (см. рисунок[3]).



Пусть вначале секущая плоскость перпендикулярна оси конуса: тогда в сечении имеем окружность ($e = 0$, красное сечение). Будем поворачивать плоскость, постепенно уменьшая угол с осью конуса: в сечении получаются эллипсы, эксцентриситет которых постепенно увеличивается (жёлтое сечение). Наконец, наступает критический момент, когда плоскость становится параллельна образующей конуса: эксцентриситет обращается в единицу, эллипс «рвётся» и превращается в параболу (зелёное сечение). Стоит немного шевельнуть плоскость дальше — и уже мы имеем в сечении кривую с $e > 1$, то есть гиперболу (голубое сечение).

Таким образом, можно сказать, что парабола — это вырожденный случай, своего рода граница между соответствующими семействами эллипсов и гипербол с одним и тем же значением фокального параметра p.

Теперь мы полностью готовы перейти к физике.

5 Задача двух тел

Рассмотрим две материальные точки массами M и m; впоследствии тело M будет притягивающим центром (например, Солнцем), а тело m — частицей, движение которой нас интересует (например, планетой).

Пусть $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведённый от точки M к точке m (он «отслеживает» относительное движение — тела m относительно тела M). Введём обозначения: C — центр масс рассматриваемых тел; $\vec{r}_1$ — радиус-вектор тела m, проведённый из C; $\vec{r}_2$ — радиус-вектор тела M, проведённый из C.

Задача 20. Выразите $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ через M, m и $\vec{r}$.

$\boxed{\vec{r}_1 = \frac{M}{M+m}\vec{r};\ \vec{r}_2 = -\frac{m}{M+m}\vec{r}}$

[3] Ссылка на оригинал.

Задача 21. Покажите, что суммарная кинетическая энергия в системе центра масс

$$K = \frac{m\dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{M\dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2}$$

равна

$$K = \frac{\mu\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}\,,$$

где $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ — *приведённая масса.*

Задача 22. В интересующих нас ситуациях выполнено $M \gg m$. Покажите, что в таком случае центр масс фактически совпадает с точкой M, а для кинетической энергии системы тел имеем

$$K = \frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} = \frac{mv^2}{2}\,.$$

Следовательно, можно считать притягивающий центр M неподвижным и относительно него рассматривать движение тела m.

Задача 23. Пусть $d\vec{r}$ — малое приращение радиус-вектора $\vec{r}$. Покажите, что $\vec{r}\cdot d\vec{r} = r dr$ (слева стоит скалярное произведение векторов; буква без стрелочки означает модуль соответствующего вектора). Это можно сделать двумя способами:

1) продифференцировать равенство $\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$;
2) с помощью рисунка понять геометрический смысл доказываемого равенства.

Задача 24. Пусть $F = \frac{GMm}{r^2}$ — сила всемирного тяготения, действующая на тело m со стороны тела M. Выразите вектор $\vec{F}$ через G, M, m и $\vec{r}$. Покажите, что $\vec{F}\cdot d\vec{r} = F dr$.

Задача 25. Пусть тело m переместилось из точки 1 с радиус-вектором $\vec{r}_1$ в точку 2 с радиус-вектором $\vec{r}_2$. Покажите, что работа силы всемирного тяготения

$$A = \int\limits_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

не зависит от формы траектории и равна

$$A = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Данное обстоятельство позволяет ввести потенциальную энергию гравитационного взаимодействия тел M и m:

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

(нулевой уровень потенциальной энергии, как обычно в подобных ситуациях, выбран на бесконечности).

Задача 26. Убедитесь, что $A = -\Delta U$. Таким образом, если гравитационное поле совершает положительную работу, то потенциальная энергия взаимодействующих тел уменьшается; наоборот, если мы удаляем друг от друга притягивающиеся тела, увеличивая тем самым их потенциальную энергию, то поле совершает при этом отрицательную работу.

6 Сохранение энергии и момента импульса

В дальнейшем для краткости обозначаем $\alpha = GMm$. Выражение для полной механической энергии $E = K + U$ движущегося тела примет вид

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r}\,.$$

Задача 27. (*Теорема о кинетической энергии*) Докажем вначале общую теорему механики: *работа, совершённая внешней силой над телом (материальной точкой), равна изменению кинетической энергии тела.*

Пусть тело переместилось из точки 1 в точку 2. Имеем:

$$A = \int\limits_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \ldots = \int\limits_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta K.$$

Восстановите пропуск, обозначенный многоточием.

Задача 28. С помощью установленных фактов ($A = \Delta K$ — всегда; $A = -\Delta U$ — для гравитационного взаимодействия) покажите, что имеет место закон сохранения энергии: *полная механическая энергия движущегося тела*

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$$

остаётся неизменной.

Итак, при движении тела m его полная энергия E сохраняется. Оказывается, есть и другая сохраняющаяся величина, причём векторная — момент импульса $\vec{L}$.

Напомним, что момент импульса тела m относительно точки M — это векторное произведение радиус-вектора тела, проведённого из M, на импульс тела:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}.$$

Аналогично, если к телу m приложена сила $\vec{F}$, то момент силы $\vec{F}$ относительно точки M есть

$$\vec{\mathscr{M}} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Задача 29. Согласно второму закону Ньютона имеем $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ (производная вектора импульса тела по времени равна приложенной к телу силе). С учётом этого равенства покажите, что производная вектора момента импульса по времени равна моменту силы, приложенной к телу:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{\mathscr{M}}.$$

Задача 30. Если $\vec{F}$ — сила гравитационного притяжения тела m к телу M, то момент силы $\vec{F}$ относительно M равен нулю. Почему? Выведите отсюда, что $\vec{L} = \mathrm{const}$, то есть *момент импульса тела m относительно точки M сохраняется.*

Задача 31. Сохранение векторной величины — это неизменность её модуля и неизменность направления. Из неизменности направления момента импульса заключите, что тело m совершает *плоское движение*, то есть орбита целиком расположена в некоторой плоскости.

7 Уравнение движения в полярных координатах

Дальнейшее изучение движения тела m мы будем проводить в полярной системе координат, полюс которой расположим в точке M, а полярную ось выберем пока произвольно (впоследствии мы конкретизируем выбор полярной оси так, чтобы обратить в нуль некую константу интегрирования). Таким образом, положение тела m определяется двумя числами:

1) длиной r радиус-вектора $\vec{r}$, проведённого из M;
2) углом φ между радиус-вектором $\vec{r}$ и полярной осью.

Задача 32. В прямоугольной системе координат для вектора скорости $\vec{v}$ (как и вообще для всякого вектора) мы рассматриваем его компоненты v_x и v_y. Точно так же в полярной системе координат мы для скорости $\vec{v}$ можем рассмотреть её радиальную v_r и азимутальную v_φ компоненты.

Радиальная компонента v_r — это просто скорость изменения расстояния до полюса, а величина v_φ есть скорость азимутального движения (в направлении, перпендикулярном радиус-вектору). Объясните равенства:

$$v^2 = v_r^2 + v_\varphi^2, \qquad v_r = \dot{r}, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \qquad L = mr^2\dot{\varphi}.$$

Таким образом, при движении тела m сохраняются величины

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\alpha}{r}\,, \tag{1}$$

$$L = mr^2\dot{\varphi}. \tag{2}$$

Задача 33. Теперь мы можем доказать второй закон Кеплера. Он легко вытекает из закона сохранения момента импульса. Покажите это.

Задача 34. Продифференцируйте по времени сохраняющиеся величины E, L и получите уравнение движения

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = -\frac{\alpha}{r^2}\,.$$

8 Эффективная потенциальная энергия

Теперь мы уже способны составить качественное представление о характере движения тела m в зависимости от его энергии E.

Задача 35. Исключим из (1) и (2) величину $\dot{\varphi}$. Получите соотношение

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\,. \tag{3}$$

Задача 36. Обозначим

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\,.$$

Тогда равенство (3) примет вид

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + V(r).$$

Это — полная механическая энергия одномерного движения тела вдоль координаты r с потенциальной энергией $V(r)$. Функцию $V(r)$ можно назвать *эффективной потенциальной энергией*. Исследование данной функции позволит нам продвинуться в изучении движения тела m.

1) Изобразите (качественно) график функции $V(r)$.

2) Найдите точку минимума r_0 функции $V(r)$. Выразите наименьшее значение V_0 функции $V(r)$ через α и r_0.

$\boxed{2)\ r_0 = \frac{L^2}{m\alpha};\ V_0 = -\frac{m\alpha^2}{2L^2}}$

Задача 37. Продолжаем работать с функцией $V(r)$. Будем пересекать этот график горизонтальными прямыми $V = E$ при разных E, то есть смотреть, какая картина будет получаться при различных значениях энергии E тела m. Заодно сопоставляем наши наблюдения с картиной конических сечений, рассмотренной выше.

1) Пусть вначале $E = V_0$. Убедитесь, что этот случай соответствует движению тела m по круговой орбите (красное сечение!). Выведите формулу для скорости: $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$. Покажите, что $V_0 = -\frac{GMm}{2r_0}$, а кинетическая энергия $K = \frac{GMm}{2r_0}$.

2) Пусть теперь $V_0 < E < 0$. Тело m «колеблется в потенциальной яме», совершая *финитное движение* (то есть двигается в ограниченной области пространства). Ниже мы покажем, что этот случай отвечает движению тела по *эллиптической* орбите (жёлтое сечение). Каким параметрам эллипса соответствуют точки поворота — абсциссы точек пересечения графика $V(r)$ с прямой $V = E$?

3) Пусть $E = 0$. Как видите, движение становится *инфинитным* — тело m уходит на бесконечность. Как вы думаете, по какой траектории?

4) Пусть $E > 0$. Движение и подавно инфинитно. Какова траектория движения?

5) В последних двух случаях ($E \geqslant 0$) дайте физическую интерпретацию абсциссы единственной точки пересечения графика $V(r)$ и прямой $V = E$.

6) Объясните ситуацию при $E < V_0$.

9 Один табличный интеграл

Теперь нам нужно понять формулу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \qquad (4)$$

и научиться ею пользоваться.

Задача 38. (*Производная обратной функции*) Мы знаем, что $(e^x)' = e^x$. Как с помощью этого равенства найти производную обратной функции $y = \ln x$? Давайте выразим отсюда x:

$$x = e^y,$$

и продифференцируем полученное равенство по x:

$$1 = e^y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Действуя аналогично, найдите производную функции $y = \arcsin x$. После этого проверьте формулу (4) дифференцированием.

Задача 39. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 5}}\,.$$

Указание. Выделите полный квадрат.

$\boxed{\arcsin \frac{x-3}{2} + C}$

Задача 40. Объясните, почему

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos \frac{x}{a} + C.$$

10 Уравнение траектории в полярных координатах

Сейчас нам предстоит финальная и технически трудная часть всей этой теории. Возвращаемся нашим сохраняющимся величинам (1) и (2):

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\alpha}{r}\,, \qquad L = mr^2\dot{\varphi}$$

и следствию из этих формул — выражению (3):

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}\,.$$

Задача 41. Выразите отсюда производные как функции только r:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}\,, \qquad \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\ldots}$$

и поделите второе выражение на первое. Должно получиться

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{m}{L}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{L^2}{2mr^2}\right)}.$$

Задача 42. Сделайте замену $z = 1/r$ и выделите полный квадрат. Должно получиться

$$\frac{dz}{d\varphi} = \pm\sqrt{\frac{2mEL^2 + m^2\alpha^2}{L^4} - \left(z - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2}.$$

Задача 43. Переписав это в виде

$$\pm d\varphi = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2mEL^2+m^2\alpha^2}{L^4} - \left(z - \frac{m\alpha}{L^2}\right)^2}}\,,$$

интегрируем через арккосинус:

$$\pm\varphi + C = \arccos(\ldots)$$

(знак перед arccos взяли «плюс», так как перед φ всё равно пока стоит «плюс-минус»).

Задача 44. Теперь вспомним, что выбор полярной оси (от которой отсчитывается угол φ) у нас был произволен. Выберем её так, чтобы константа интегрирования C обратилась в нуль. Иными словами, без ограничения общности просто полагаем $C = 0$ в последней формуле.

А как быть с «плюс-минусом»? Легко понять, что эта неопределённость отвечает двум различным направлениям движения тела m (по часовой стрелке или против часовой). Направление движения нас не интересует, поэтому без ограничения общности оставляем «плюс».

Завершите преобразования и получите формулу:

$$r = \frac{L^2/m\alpha}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \cos\varphi} \,. \tag{5}$$

Как видим, соотношение (5) есть уравнение конического сечения (эллипса, гиперболы или параболы)

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

с фокальным параметром

$$p = \frac{L^2}{m\alpha} \tag{6}$$

и эксцентриситетом

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m\alpha^2}} \,. \tag{7}$$

Задача 45. Убедитесь, что при $-\frac{m\alpha^2}{2L^2} < E < 0$ тело движется по эллипсу (и посмотрите, кстати, что нижняя граница для E — это в точности V_0, полученное в задаче 36). Тем самым доказан первый закон Кеплера!

Задача 46. Убедитесь, что при $E = 0$ тело движется по параболе, а при $E > 0$ — по гиперболе (что подтверждает наши догадки, сделанные в пунктах 3 и 4 задачи 37).

11 Доказательство третьего закона Кеплера

Это последний пункт программы, который необходимо выполнить. Для эллиптической орбиты будем искать отношение T^2/a^3, где T — период обращения, a — большая полуось.

Задача 47. Пусть за малое время dt радиус-вектор $\vec{r}$ тела m заметает малый сектор площади $dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Отсюда и из формулы $L = mr^2\dot{\varphi}$ покажите, что

$$T = \frac{2\pi mab}{L} \,.$$

Задача 48. Используя результат задачи 6 и соотношения (6), (7), выведите выражение для полной энергии:

$$E = -\frac{\alpha}{2a} \,.$$

Задача 49. Используя формулу из задачи 5, покажите, что

$$b = \frac{L}{\sqrt{-2mE}} = L\sqrt{\frac{a}{m\alpha}} \,.$$

Задача 50. Докажите третий закон Кеплера, показав, что

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}\,.$$

12 Задачи

Задача 51. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 11*) По диаметру астероида, который имеет форму шара, проходит узкий тоннель. С поверхности астероида в тоннель бросили камень, сообщив ему скорость, равную первой космической для этого астероида. Через какое время камень вернётся назад? Известно, что минимальный период обращения космических объектов вокруг астероида равен T_0; астероид состоит из однородного вещества, а влияние гравитационного поля других небесных тел мало.

Примечание. Площадь эллипса $S = \pi ab$, где a и b — длины полуосей эллипса.

$\boxed{\tau = T_0\left(1 + \frac{1}{\pi}\right)}$

Задача 52. (*Всеросс., 2005, финал, 11*) Предположим, что в результате какой-то космической катастрофы Луна остановилась в своём орбитальном движении вокруг Земли. Определите, сколько времени τ Луна будет падать на Землю и с какой относительной скоростью v планеты столкнутся. Расстояние от Земли до Луны $L = 3{,}84 \cdot 10^5$ км, радиус Земли $R = 6370$ км. Массу и размер Луны можно считать малыми по сравнению с массой и размером Земли.

$\boxed{\tau = \pi\sqrt{\frac{L^3}{8gR^2}} = 4{,}19 \cdot 10^5 \text{ с}; \; v = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \text{ км/с}}$

Задача 53. (*Всеросс., 2007, финал, 11*) В вакууме на расстоянии $L = 10$ см друг от друга находятся протон p^+ и антипротон p^-. Обе частицы имеют одинаковые массы $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг и одинаковые по модулю заряды $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл. В первый момент частицы неподвижны. При сближении частиц на расстояние $x = 10^{-13}$ м происходит их аннигиляция с рождением γ-квантов.

1) Какие скорости будут иметь частицы при таком сближении?

2) Через какое время произойдёт аннигиляция частиц?

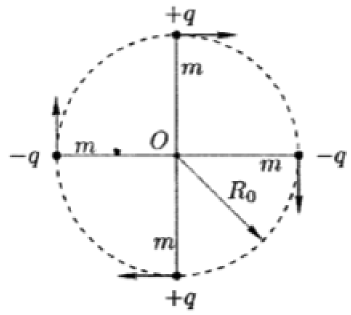
3) Нужно ли при решении задачи учитывать гравитационные силы, действующие между частицами? Ответ поясните расчётом.

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 0{,}885 \cdot 10^{-11}$ Кл^2/(Н $\cdot$ м^2.

Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

$\boxed{1)\; v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m x}} = 1{,}17 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \; 2)\; \tau = \sqrt{\frac{\pi^3\varepsilon_0 m L^3}{4e^2}} = 67 \text{ мс}; \; 3) \text{ нет}}$

Задача 54. (*Всеросс., 2010, финал, 11*) В свободном пространстве на окружности радиуса R_0 в вершинах вписанного квадрата расположены четыре точечные массы m. Две из них несут заряд $+q$, а две другие — $-q$ (рис.). В начальный момент эти материальным точкам сообщают одинаковые по модулю скорости, направленные по касательной к окружности по часовой стрелке.



Известно, что достигаемое в процессе движения минимальное расстояние от любой из точечных масс до центра O начальной окружности равно R_1 ($R_1 < R_0$). Считайте, что в любой момент времени заряды находятся в вершинах квадрата с центром в точке O. Действием гравитационных сил можно пренебречь.

1) Выполните необходимые расчёты и определите траектории движения материальных точек.

2) Определите характерное время движения материальных точек.

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m (R_0+R_1)^3}{q^2(2\sqrt{2}-1)}}}$$

Задача 55. (*Всеросс., 1995, финал, 11*) Заголовок газетной статьи: *Со скоростью 130 тысяч километров в час прочь от Земли* (Борис Лысенко, «Известия», 21 февраля 1995).

«Два ветерана американской космонавтики снова и снова удивляют своими неожиданными резервами энергии во время полёта из Солнечной системы в карусель Млечного пути.

В 1972 и 1973 годах с Земли к центру Млечного пути отправились два американских зонда — «Пионер-10» и «Пионер-11». Зонды летят по орбите, двигаясь по которой смогут вернуться на Землю лишь через 250 миллионов лет.

За прошедшие двадцать с лишним лет оба «Пионера» благополучно прошли астероидный пояс и со скоростью 130 тысяч километров в час удаляются от Солнечной системы и находятся на расстоянии десяти миллиардов километров. Из-за огромного расстояния сигналы от спутников поступают на Землю с опозданием на 12 часов.

Космические корабли будут функционировать до тех пор, пока не иссякнут термоэлектрические генераторы, вырабатывающие энергию. В целях экономии на борту кораблей в рабочем состоянии находятся лишь жизненно важные приборы.

Зонды измеряют «солнечный ветер», выясняют влияние гравитации на систему внешних планет, а также ищут доказательство наличия так называемых гравитационных волн, которые со скоростью света распространяют поле тяготения небесных тел.

На случай встречи в бесконечных пространствах Вселенной с инопланетянами ученые из НАСА на борту «Пионера» прикрепили таблицу, на которой изображены мужчина и женщина, а также наша Солнечная система».

Используя данные из второго абзаца приведённой заметки, оцените, на какое максимальное расстояние от Солнца могут удалиться эти космические аппараты в течение ближайшего миллиарда лет. Как изменится ответ, если использовать данные не второго, а третьего абзаца? Влиянием космических объектов вне Солнечной системы можно пренебречь. В стиле газетной публикации добавим, что свет от Солнца до Земли идёт около 8 мин.

$\boxed{L \approx 1{,}2 \cdot 10^{14} \text{ км (второй абзац); } L \approx 1{,}1 \cdot 10^{18} \text{ км (третий абзац)}}$

Задача 56. (*APhO, 2003*)

- Satellite's orbit transfer.
- Solution.

Задача 57. (*IPhO, 2005*)

- An ill fated satellite.
- Solution.

Задача 58. (*APhO, 2017*)

- Эволюция системы бинарных сверхмассивных чёрных дыр / Evolution of Supermassive Black Holes Binary.
- Solution.