

## Изопроцессы

ЗАДАЧА 1. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) При изотермическом сжатии объём одного моля идеального газа уменьшился на 0,5%. На сколько процентов изменилось его давление? Ответ (с точностью до десятых долей процента) подтвердить вычислением.

$$\frac{\Delta p}{p} \approx 0,5\%$$

ЗАДАЧА 2. («Росатом», 2011, 10) При изобарическом охлаждении температура газа уменьшилась от значения  $T_1$  до значения  $T_2$ , при этом объём газа уменьшился на величину  $\Delta V$ . Найти конечный объём газа.

$$\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{\Delta V}{V_2}$$

ЗАДАЧА 3. (МФТИ, 1997) Два моля гелия при постоянном давлении  $p_0 = 10$  атм охлаждаются на  $\Delta T = 1$  К так, что относительное уменьшение объёма газа  $\Delta V/V_0$  составляет  $\alpha = 0,25\%$ .

- 1) На сколько литров уменьшился объём газа?
- 2) Найти начальную температуру газа.

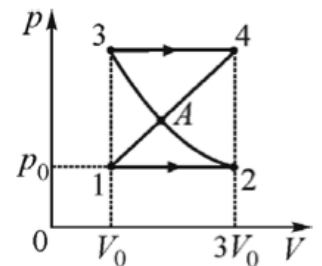
$$\Delta V = \frac{\Delta T}{T} V_0 = \alpha V_0 \Rightarrow T = \frac{V_0}{\alpha \Delta V} = 400 \text{ К}$$

ЗАДАЧА 4. (МФТИ, 1997) Моль гелия нагревается при постоянном объёме  $V_0 = 400$  л так, что относительное увеличение его давления составило  $\Delta p/p_0 = \alpha = 0,4\%$ .

- 1) На сколько увеличилась температура газа, если его начальная температура  $T_0 = 500$  К?
- 2) На сколько атмосфер увеличилось давление газа?

$$\Delta p = \alpha p_0 = \frac{\alpha}{T_0} p_0 V_0 = \alpha n R T_0 = \alpha p_0 \Rightarrow T = \frac{p_0}{\alpha p_0} = 1,4 T_0 = 700 \text{ К}$$

ЗАДАЧА 5. (Всеросс., 2014, МЭ, 10) Над воздухом проводят процесс, изображённый на рисунке. Участки 12 и 34 представлены на графике горизонтальными прямыми линиями, участок 14 — наклонной прямой линией. На участке 23 температура воздуха постоянна. Объём воздуха в точке 3 совпадает с его объёмом в точке 1 и равен  $V_0 = 1$  л, а объём в точке 4 совпадает с объёмом в точке 2 и равен  $3V_0$ . Минимальное давление в процессе  $p_0 = 10^5$  Па. Найдите координаты точки  $A$  самопересечения на  $pV$ -диаграмме.



$$p_A \approx 1,27 \cdot 10^5 \text{ Па}, V_A \approx 1,73 \text{ л}$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 1992) Цилиндрический колокол для подводных работ высотой 2 м опускается вверх дном с борта катера на дно водоёма глубиной 3 м. Найти толщину воздушной подушки, образовавшейся у «потолка» колокола к моменту его касания дна водоёма. Температуру считать постоянной.

$$x \approx 9 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 1992) Пустой сосуд наполняется через вентиляльное устройство путём под-соединения к нему баллонов со сжатым воздухом. После выравнивания давлений в сосуде и баллоне вентиль перекрывается, затем подсоединяется следующий баллон и т. д. Найти отношение давлений в сосуде после подсоединения одного и двух баллонов со сжатым воздухом. Известно, что объём сосуда втрое больше объёма одного баллона. Считать, что в процессе выравнивания давлений выравнивается и температура газа в сосуде и баллоне.

$$\frac{L}{V}$$

ЗАДАЧА 8. («Курчатов», 2014, 11) Цилиндрический сосуд длиной  $L = 1$  м, расположенный горизонтально, разделён на две равные части подвижным массивным поршнем. По обе стороны от поршня находится идеальный газ при давлении  $p_0$ . Затем сосуд поставили вертикально, при этом поршень опустился на  $h = 20$  см. Найдите давление  $p_0$ , если известна масса поршня  $m = 10$  кг и его площадь  $S = 10$  см<sup>2</sup>. Ускорение свободного падения  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>. Температура окружающей среды постоянна.

$$p_0 \approx \frac{4T_0}{\tau} \frac{S}{b m} = 0d$$

ЗАДАЧА 9. («Росатом», 2013, 11) Закрытый вертикальный цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. Над поршнем находится 1 моль идеального газа, под поршнем —  $\nu$  молей, а отношение объёмов верхней и нижней частей сосуда равно 3. Если сосуд перевернуть, то поршень установится посередине сосуда. Найти  $\nu$ . Температура газа постоянна.

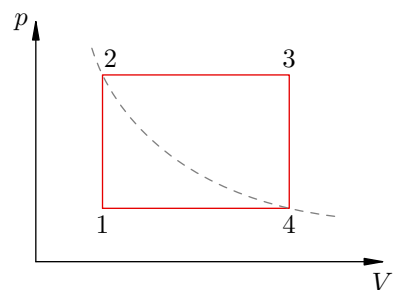
$$\frac{6}{5} = \nu$$

ЗАДАЧА 10. («Росатом», 2013, 11) В открытом вертикальном цилиндре с площадью сечения  $S$  под массивным поршнем находится идеальный газ под давлением  $p$ . Поршень плотно притёрт к стенкам цилиндра, но может скользить вдоль них без трения. Цилиндр переворачивают вверх дном. При этом поршень опускается так, что объём газа в цилиндре увеличивается вдвое. Найти атмосферное давление и массу поршня. Температура газа в цилиндре не изменяется.

$$\frac{p_0}{S} = m \frac{g}{S} = 0d$$

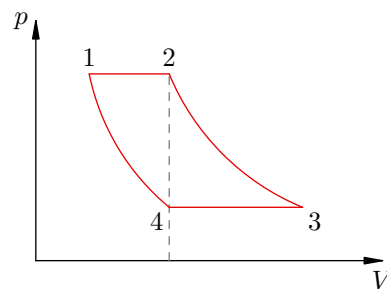
ЗАДАЧА 11. На диаграмме зависимости давления  $p$  от объёма  $V$  для некоторой массы идеального газа две изобары пересекаются двумя изохорами в точках 1, 2, 3 и 4, причём точки 2 и 4 лежат на одной изотерме (см. рисунок). Найдите температуру  $T_2$  в точке 2, если известны температуры  $T_1$  и  $T_3$  в точках 1 и 3 соответственно.

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$



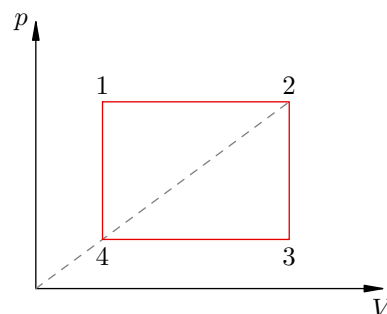
ЗАДАЧА 12. (МФТИ, 1995) На диаграмме зависимости давления  $p$  от объёма  $V$  для некоторой массы идеального газа две изотермы пересекаются двумя изобарами в точках 1, 2, 3 и 4 (см. рисунок). Найти отношение температур  $T_3/T_1$  в точках 3 и 1, если отношение объёмов в этих точках  $V_3/V_1 = \alpha$ . Объёмы газа в точках 2 и 4 равны.

$$\frac{v}{L} = \frac{v_L}{\varepsilon L}$$



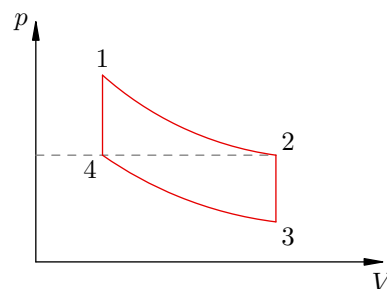
ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 1995) На диаграмме зависимости давления  $p$  от объёма  $V$  для некоторой массы идеального газа две изобары и две изохоры пересекаются в точках 1, 2, 3 и 4 (см. рисунок). Найти температуры газа  $T_1$  и  $T_3$  в точках 1 и 3, если точки 2 и 4 лежат на прямой, проходящей через начало координат, а температуры газа в этих точках равны соответственно  $T_2$  и  $T_4$ .

$$\frac{v_L \varepsilon L}{\varepsilon L} = \varepsilon L = \frac{v_L}{L}$$



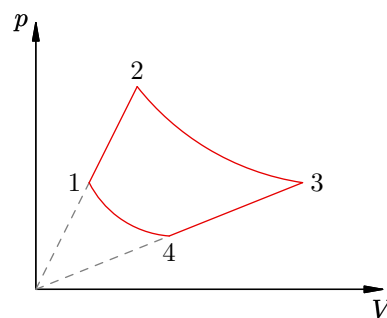
ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 1995) На диаграмме зависимости давления  $p$  от объёма  $V$  для некоторой массы идеального газа две изотермы пересекаются двумя изохорами в точках 1, 2, 3 и 4 (см. рисунок). Найти отношение давлений  $p_3/p_1$  в точках 3 и 1, если отношение температур в этих точках  $T_3/T_1 = \beta$ . Давления газа в точках 2 и 4 равны.

$$\frac{\varepsilon L}{\varepsilon L} = \frac{v_L}{\varepsilon L}$$



ЗАДАЧА 15. (МФТИ, 1995) Диаграмма зависимости давления  $p$  от объёма  $V$  для некоторой массы идеального газа состоит из двух изотерм и двух отрезков прямых, проходящих через начало координат (см. рисунок). Найти объём газа  $V_4$  в состоянии 4, если известны его объёмы  $V_1$ ,  $V_2$  и  $V_3$  в состояниях 1, 2 и 3 соответственно.

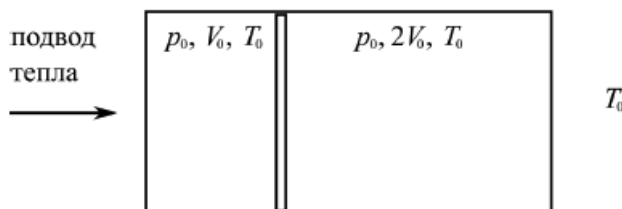
$$\frac{\varepsilon L}{\varepsilon L} = \frac{v_L}{\varepsilon L}$$



ЗАДАЧА 16. («Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11) В вертикальном цилиндре с гладкими стенками под подвижным поршнем, расположенным на высоте  $h_0 = 63$  см над дном цилиндра, находится гелий. На поршень медленно насыпали песок. В результате высота положения поршня уменьшилась до  $h_1 = 21$  см. Затем треть песка аккуратно убрали. На какой высоте теперь располагается поршень? Температура содержимого цилиндра и давление воздуха над цилиндром оставались неизменными.

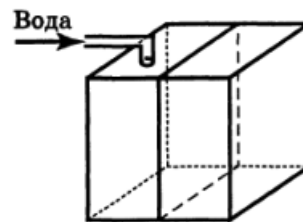
$$\frac{v_L + 0 \cdot v_L}{v_L + 0 \cdot v_L} = \frac{v_L}{v_L}$$

ЗАДАЧА 17. («Курчатов», 2018, 10) Герметичный цилиндрический сосуд расположен горизонтально и разделён на две части лёгким теплонепроницаемым поршнем, свободно перемещающимся без трения. Боковые стенки сосуда теплоизолированы, а через торцы возможна теплопередача. В обеих частях сосуда находится идеальный газ, начальная температура и давление равны  $T_0$  и  $p_0$  соответственно, начальный объём левой части сосуда равен  $V_0$ , правой части —  $2V_0$ . Газ слева от поршня начинают нагревать через левый торец, а газ справа от поршня свободно обменивается теплом с окружающей средой, температура которой остаётся постоянной и равной  $T_0$  (рис.).



Постройте на  $pV$ -диаграмме график процесса, происходящего с газом в левой части сосуда. Приведите необходимые пояснения.

ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 1992, ОЭ, 10) Воздух, заполняющий кубический резервуар, находится при нормальных условиях. Длина ребра резервуара  $a = 1$  м. Резервуар разделили на две равные части, поместив в него тонкий поршень (рис.). В левую половину резервуара медленно наливают воду. Уровень воды достиг высоты  $h = a/2$ . На какое расстояние сместился при этом поршень? Трения нет. Давлением пара можно пренебречь. Резервуар находится в изотермических условиях.



$$\text{м} \quad \Delta l \approx x$$

ЗАДАЧА 19. (Всеросс., 2006, ОЭ, 10) Сосуд, состоящий из двух цилиндрических участков разного диаметра, запаян с узкого конца. Широкой частью он насажен на гладкий неподвижный поршень (рис.). Образовавшаяся герметичная полость частично заполнена водой, так что вода присутствует и в верхней части сосуда, а остальной объём занимает воздух при давлении  $p_0 = 140$  кПа. Система находится в равновесии. На торец узкой части сосуда поместили гирию массой, равной массе пустого сосуда. Когда система вновь пришла в равновесие при неизменной температуре, оказалось, что сосуд опустился на  $\Delta h = 7$  см. Найдите в этом состоянии высоту  $x$  столба воздуха в сосуде. Полная длина узкой части сосуда  $H = 5$  м, площадь её поперечного сечения составляет  $\alpha = 0,1$  от площади сечения широкой части. Атмосферное давление  $p_{\text{атм}} = 1 \text{ атм} = 100$  кПа.



$$\text{м} \quad \Delta l = x$$

ЗАДАЧА 20. (Всеросс., 2007, ОЭ, 10) К поршню, который делит герметичный горизонтальный цилиндр на два отсека равной длины, прикреплён шток, проходящий через отверстие в торце цилиндра (рис.). Начальное давление воздуха в отсеках одинаково и равно внешнему. Найдите, на какую долю  $x$  первоначальной длины отсека сместится поршень, если внешнее давление изменить в  $n$  раз. Проведите расчёт для  $n_1 = 50$  и  $n_2 = 1/50$ . Отношение площади  $s$  штока к площади  $S$  поршня:  $\alpha = s/S = 0,02$ . Температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной. Трение не учитывайте.

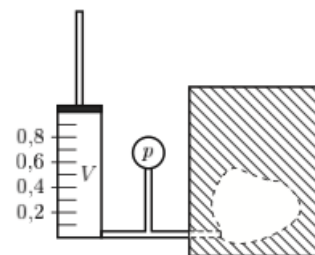


$$10^4 \approx 2x; 10^4 \approx 1x; \frac{vuz}{z^v(1-u)u^v+z^v(x-z)\sqrt{+z-v}} = x$$

ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 2013, РЭ, 10) Воздушный шарик радиусом  $r = 12$  см надут до давления  $p_0 = 1,2 \cdot 10^5$  Па. Масса оболочки  $M = 20$  г. Шарик погружают в глубокую воду на некоторую глубину  $h$ . При каком значении  $h$  шарик начнёт тонуть? Считайте, что температура воды  $t = 4^\circ\text{C}$  и её плотность  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> не зависят от глубины. Воздух считайте идеальным газом.

$$p_{\text{внеш}} \frac{V}{V_0} = p_0 \left( \frac{d}{\text{мкм}} - \frac{1,4M}{\pi d^2 V_0} \right) \frac{6}{1} = p$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2010, РЭ, 10) В толстой бетонной стене была обнаружена внутренняя полость. Для определения её объёма в стене просверлили тонкое отверстие, соединяющее полость с атмосферой. Через это отверстие тонким шлангом полость герметично соединили с поршневым насосом и манометром (см. рисунок). В начальном состоянии поршень насоса находился в верхнем положении, а давление в системе насос—полость равнялось атмосферному. Затем была исследована зависимость  $p(V)$  давления в системе от объёма воздуха в насосе. Полученные экспериментальные результаты представлены в таблице.

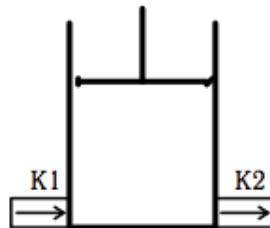


$V$ , л	$p$ , кПа
1,0	100
0,8	110
0,6	130
0,4	150
0,2	175

Путём графического анализа результатов эксперимента определите объём внутренней полости. Погрешность измерения давления в данном эксперименте составляла 3%. Погрешностью определения объёма под поршнем насоса можно пренебречь. Уменьшение объёма насоса производилось квазистатически, то есть настолько медленно, что температуру воздуха в системе насос—полость на протяжении всего эксперимента можно считать равной температуре окружающей среды.

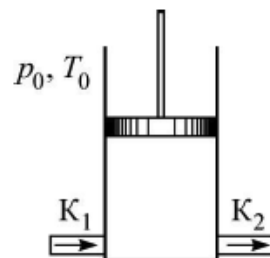
$$10^4 \approx 2x; 10^4 \approx 1x$$

Задача 23. (МОШ, 2015, 11) В цилиндре с поршнем, где находится воздух, имеются два клапана: впускной К1 и выпускной К2. Система клапанов работает таким образом, что давление в цилиндре поддерживается в промежутке от  $0,8p_0$  до  $1,4p_0$ , где  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па — атмосферное давление: как только давление в цилиндре падает ниже  $0,8p_0$ , открывается впускной клапан, и давление становится равным  $0,8p_0$ ; при превышении давлением значения  $1,4p_0$  открывается выпускной клапан, и давление падает до  $1,4p_0$ . Поршень совершает очень медленные колебания, в процессе которых объём воздуха в цилиндре изменяется в пределах от  $V_0$  до  $2V_0$ , где  $V_0 = 22,4$  л. Постройте график зависимости давления воздуха в цилиндре от его объёма в данном процессе. Объясните Ваше построение. Считайте, что с момента начала опыта уже прошло несколько колебаний. Определите наименьшее и наибольшее число молей воздуха в цилиндре. Температура постоянна и равна  $T_0 = 273$  К. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3$  Дж/(моль · К).



См. конец листка

Задача 24. (МОШ, 2016, 10) В цилиндре под поршнем находится воздух. В стенках цилиндра есть два клапана: впускной К1 и выпускной К2. Впускной клапан открывается тогда, когда разность давлений воздуха снаружи и внутри цилиндра превышает  $\Delta_1 = 0,2p_0$ , где  $p_0$  — атмосферное давление. Выпускной клапан открывается тогда, когда разность давлений внутри и снаружи превышает  $\Delta_2 = 0,4p_0$ . Поршень совершает очень медленные колебания так, что объём воздуха в цилиндре изменяется в пределах от  $V_0$  до  $2V_0$ . Температура снаружи и внутри цилиндра постоянна и равна  $T_0$ .



1) Определите наименьшее и наибольшее количество воздуха в цилиндре при колебаниях поршня.

2) Изобразите в координатах  $pV$  процесс, происходящий с воздухом в цилиндре после того, как поршень уже совершил достаточно много колебаний.

Ответьте на оба вопроса задачи, если  $\Delta_1 = 0,4p_0$ , а  $\Delta_2 = 0,2p_0$ .

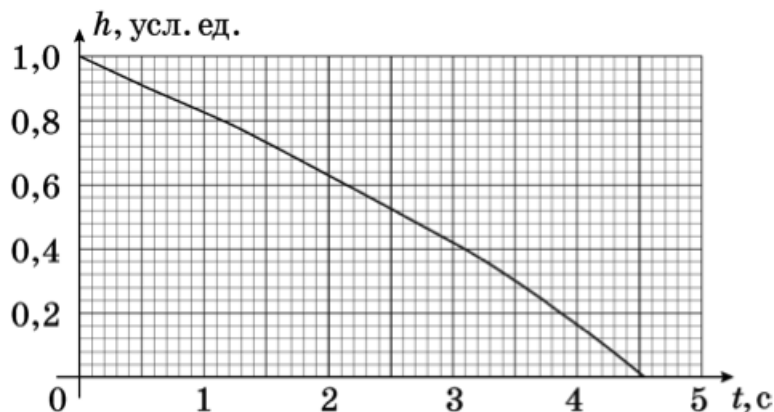
1) В первом случае  $\nu_{\max} = \frac{8p_0V_0}{5RT_0}$  и  $\nu_{\min} = \frac{2p_0V_0}{5RT_0}$ , во втором случае  $\nu = \text{const} = \frac{5p_0V_0}{8RT_0}$ ; 2) (з) См. конец листка

ЗАДАЧА 25. (Всеросс., 2018, РЭ, 10) Со дна глубокого озера всплывает пузырёк воздуха. На него действует сила сопротивления  $F = krv$ , где  $r$  — радиус пузырька,  $v$  — его скорость,  $k$  — постоянная. Вблизи дна радиус пузырька  $r_0 = 1,0$  мм. На рисунке представлен график зависимости глубины  $h$ , на которой находится пузырёк, от времени  $t$ , прошедшего от начала его движения.

- 1) Какова глубина озера?
- 2) За какое время  $\tau_1$  всплывёт пузырёк, радиус которого у дна водоёма равен  $r_1 = 0,5$  мм?
- 3) За какое время  $\tau_2$  пузырёк, радиус которого у дна водоёма равен  $r_0 = 1,0$  мм, всплывёт со дна водоёма глубиной  $H = 10$  м?

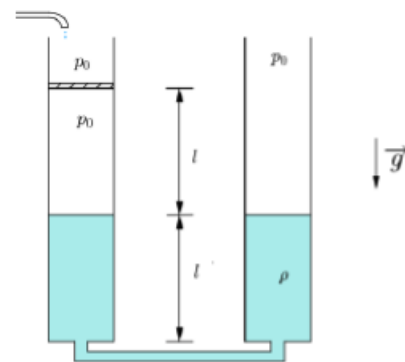
*Примечание 1.* Давление водяных паров в пузырьке, поверхностное натяжение воды, изменение формы пузырька и изменение температуры воздуха в пузырьке не учитывайте.

*Примечание 2.* Плотность воды  $\rho = 1,0 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, атмосферное давление  $p_0 = 1,0 \cdot 10^5$  Па,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, объём пузырька  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ .



1)  $h_0 = 10$  м; 2)  $\tau_1 = 18$  с; 3)  $\tau_2 = 3,3$  с

ЗАДАЧА 26. (Всеросс., 2017, РЭ, 11) В двух сообщающихся одинаковых вертикальных цилиндрических сосудах находится жидкость плотности  $\rho$ . Первоначальный уровень жидкости в сосудах  $l = 10$  см от дна (рис.). Сосуды соединены через отверстия в середине дна маленькой трубкой пренебрежимо малого объёма. В левом сосуде на высоте  $2l$  от дна находится невесомый поршень, который может свободно перемещаться без трения о стенки. Под поршнем находится воздух при атмосферном давлении  $p_0 = 2\rho gl$ . С момента времени  $t_0$  в левый сосуд в пространство над поршнем начинает поступать та же жидкость, причём скорость прироста уровня воды над поршнем составляет  $v = 0,2$  мм/с.



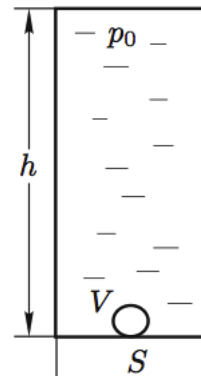
- 1) С какой скоростью движется поверхность жидкости в правом сосуде в начале процесса?
- 2) С какой скоростью и куда движется поверхность жидкости над поршнем в начале процесса?

3) На какой высоте  $z$  от дна сосуда будет находиться поверхность жидкости над поршнем: а) через 600 с? б) через 1100 с?

Температуру в сосудах можно считать постоянной. Жидкость из сосудов не выливается.

1)  $\frac{z}{a} \approx 0$ ; 2)  $22,25$  см; 3б)  $22$  см

ЗАДАЧА 27. (Всеросс., 2007, финал, 10) В высоком закрытом вертикально расположенном цилиндрическом сосуде сечением  $S$  и высотой  $h$  находится вода, занимающая весь объём сосуда, кроме маленького пузырька воздуха объёмом  $V$ , образовавшегося у дна (рис.). Давление воды в верхней части сосуда равно атмосферному давлению  $p_0$ . Определите, каким будет давление воды в верхней части сосуда после того, как пузырёк поднимется вверх. Процесс считать изотермическим. Модуль всестороннего сжатия жидкости равен  $K$ . Рассмотрите предельные переходы:



- 1)  $V \rightarrow 0$ ,
- 2)  $K \rightarrow 0$  (сильно сжимаемая жидкость),
- 3)  $K \rightarrow \infty$  (несжимаемая жидкость).

Найдите численное решение задачи для случая  $h = 3$  м,  $S = 10$  см<sup>2</sup>,  $V = 0,2$  см<sup>3</sup>,  $K = 2 \cdot 10^9$  Па, плотность воды  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

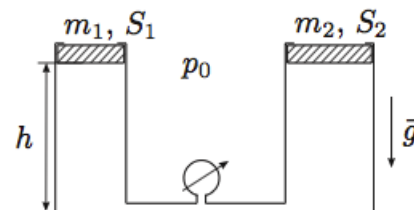
*Примечание.* Модуль всестороннего сжатия жидкости  $K$  определяется соотношением

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V_{\text{ж}}}{V_{\text{ж}}},$$

где  $\Delta p$  — изменение давления,  $|\Delta V_{\text{ж}}/V_{\text{ж}}| = \varepsilon$  — относительное изменение объёма жидкости.

$$\varepsilon_{\text{ж}} \Delta p = d : \rho b d + 0 d \leftarrow d (\varepsilon : 0 d \leftarrow d (z : 0 d \leftarrow d (1 : \left( \frac{S}{\lambda \mu \delta \sigma \nu} + \frac{\gamma S}{z (\lambda \mu + 0 d)} \right) \wedge + \frac{\gamma S}{\lambda \mu} - 0 d) \frac{z}{1} = d$$

ЗАДАЧА 28. (Всеросс., 2013, финал, 10) Два вертикальных цилиндрических сосуда соединены в нижней части трубкой с манометром пренебрежимо малого объёма (рис.). Внутри цилиндров установлены поршни, в верхней части цилиндров — упоры, ограничивающие подъём поршней. Расстояния от нижней части поршней до дна цилиндров при верхнем расположении поршней одинаковы и равны  $h = 1$  м. Под поршнями находится один моль идеального газа, атмосферное давление  $p_0 = 10^5$  Па. Поршни могут перемещаться в цилиндрах без трения.



$t, ^\circ\text{C}$	-50,0	-32,4	27,8	174,7	264,1
$p, 10^5$ Па	2,0	2,0	2,5	2,5	3,0

В таблице представлены результаты измерений давления в цилиндрах при пяти различных значениях температуры газа.

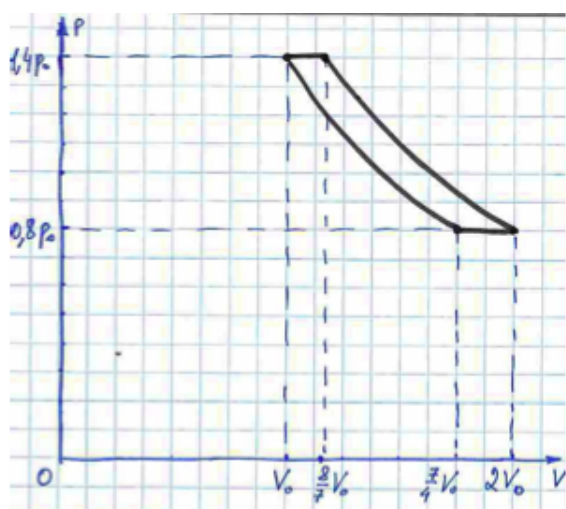
Определите массы обоих поршней  $m_1, m_2$  и площади сечения цилиндров  $S_1, S_2$ .

$$m_1 = 100 \text{ кг}, m_2 = 75 \text{ кг}, S_1 = 100 \text{ см}^2, S_2 = 75 \text{ см}^2$$



Ответ к задаче 23

График процесса после нескольких колебаний:



Наименьшее число молей воздуха в цилиндре равно 1,4, наибольшее — 1,6.

Ответ к задаче 24

