Изопроцессы

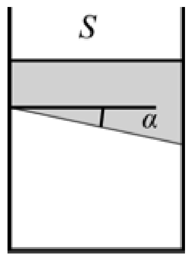
Задача 1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11*) При изотермическом сжатии объём одного моля идеального газа уменьшился на 0,5%. На сколько процентов изменилось его давление? Ответ (с точностью до десятых долей процента) подтвердить вычислением.

Увеличилось на 0,5%

Задача 2. (*«Росатом», 2011, 10*) При изобарическом охлаждении температура газа уменьшилась от значения T_1 до значения T_2, при этом объём газа уменьшился на величину ΔV. Найти конечный объём газа.

$V_2 = \frac{T_2\Delta V}{T_1 - T_2}$

Задача 3. (*Всеросс., 2019, ШЭ, 11*) В сосуде под покоящимся поршнем, нижняя плоская поверхность которого составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$, находится воздух. Во сколько раз изменится объём воздуха под поршнем, если на него медленно насыпать песок массой $m = 20$ кг? Масса поршня равна $M = 5$ кг, площадь поперечного сечения сосуда $S = 20$ см^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Считайте, что $g = 10$ м/с^2 и трения нет.



$\frac{V_1}{V_2} = \frac{(M+m)g+p_0S}{Mg+p_0S} = 1{,}8$

Задача 4. (*МФТИ, 1997*) Два моля гелия при постоянном давлении $p_0 = 10$ атм охлаждаются на $\Delta T = 1$ К так, что относительное уменьшение объёма газа $\Delta V/V_0$ составляет $\alpha = 0{,}25\%$.

1) На сколько литров уменьшился объём газа?
2) Найти начальную температуру газа.

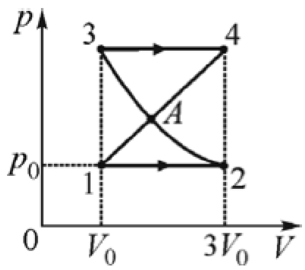
1) $\Delta V = \frac{\nu R\Delta T}{p_0} = 16{,}6\cdot 10^{-3}$ л; 2) $T_0 = \frac{\Delta T}{\alpha} = 400$ К

Задача 5. (*МФТИ, 1997*) Моль гелия нагревается при постоянном объёме $V_0 = 400$ л так, что относительное увеличение его давления составило $\Delta p/p_0 = \alpha = 0{,}4\%$.

1) На сколько увеличилась температура газа, если его начальная температура $T_0 = 500$ К?
2) На сколько атмосфер увеличилось давление газа?

1) $\Delta T = \alpha T_0 = 2$ К; 2) $\Delta p = \frac{\alpha\nu RT_0}{V_0} = 4\cdot 10^{-4}$ атм

Задача 6. (*Всеросс., 2014, МЭ, 10*) Над воздухом проводят процесс, изображённый на рисунке. Участки 12 и 34 представлены на графике горизонтальными прямыми линиями, участок 14 — наклонной прямой линией. На участке 23 температура воздуха постоянна. Объём воздуха в точке 3 совпадает с его объёмом в точке 1 и равен $V_0 = 1$ л, а объём в точке 4 совпадает с объёмом в точке 2 и равен $3V_0$. Минимальное давление в процессе $p_0 = 10^5$ Па. Найдите координаты точки A самопересечения на pV-диаграмме.



$p \approx 1{,}73 \cdot 10^5$ Па, $V \approx 1{,}73$ л

Задача 7. (*МФТИ, 1992*) Цилиндрический колокол для подводных работ высотой 2 м опускается вверх дном с борта катера на дно водоёма глубиной 3 м. Найти толщину воздушной подушки, образовавшейся у «потолка» колокола к моменту его касания дна водоёма. Температуру считать постоянной.

$x \approx 1{,}6$ м

Задача 8. (*МФТИ, 1992*) Пустой сосуд наполняется через вентильное устройство путём подсоединения к нему баллонов со сжатым воздухом. После выравнивания давлений в сосуде и баллоне вентиль перекрывается, затем подсоединяется следующий баллон и т. д. Найти отношение давлений в сосуде после подсоединения одного и двух баллонов со сжатым воздухом. Известно, что объём сосуда втрое больше объёма одного баллона. Считать, что в процессе выравнивания давлений выравнивается и температура газа в сосуде и баллоне.

$4/7$

Задача 9. (*«Курчатов», 2014, 11*) Цилиндрический сосуд длиной $L = 1$ м, расположенный горизонтально, разделён на две равные части подвижным массивным поршнем. По обе стороны от поршня находится идеальный газ при давлении p_0. Затем сосуд поставили вертикально, при этом поршень опустился на $h = 20$ см. Найдите давление p_0, если известна масса поршня $m = 10$ кг и его площадь $S = 10$ см^2. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2. Температура окружающей среды постоянна.

$p_0 = \frac{mg}{S} \frac{L^2-4h^2}{4Lh} \approx 103$ кПа

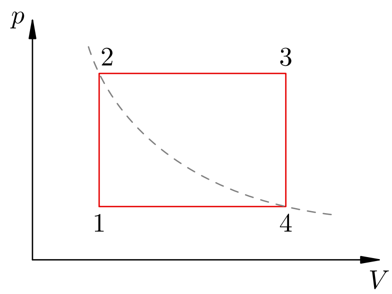
Задача 10. (*«Росатом», 2013, 11*) Закрытый вертикальный цилиндрический сосуд разделен на две части подвижным поршнем. Над поршнем находится 1 моль идеального газа, под поршнем — ν молей, а отношение объёмов верхней и нижней частей сосуда равно 3. Если сосуд перевернуть, то поршень установится посередине сосуда. Найти ν. Температура газа постоянна.

$\nu = \frac{9}{5}$ моль

Задача 11. (*«Росатом», 2013, 11*) В открытом вертикальном цилиндре с площадью сечения S под массивным поршнем находится идеальный газ под давлением p. Поршень плотно притёрт к стенкам цилиндра, но может скользить вдоль них без трения. Цилиндр переворачивают вверх дном. При этом поршень опускается так, что объём газа в цилиндре увеличивается вдвое. Найти атмосферное давление и массу поршня. Температура газа в цилиндре не изменяется.

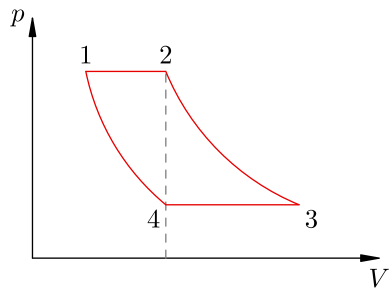
$p_0 = \frac{3}{4}p$; $m = \frac{pS}{4g}$

Задача 12. На диаграмме зависимости давления p от объёма V для некоторой массы идеального газа две изобары пересекаются двумя изохорами в точках 1, 2, 3 и 4, причём точки 2 и 4 лежат на одной изотерме (см. рисунок). Найдите температуру T_2 в точке 2, если известны температуры T_1 и T_3 в точках 1 и 3 соответственно.



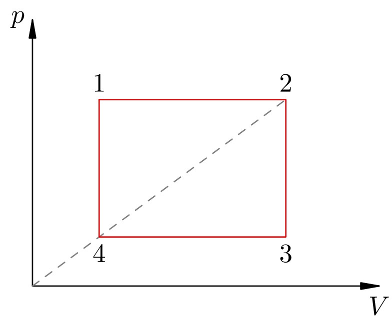
$T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$

Задача 13. (*МФТИ, 1995*) На диаграмме зависимости давления p от объёма V для некоторой массы идеального газа две изотермы пересекаются двумя изобарами в точках 1, 2, 3 и 4 (см. рисунок). Найти отношение температур T_3/T_1 в точках 3 и 1, если отношение объёмов в этих точках $V_3/V_1 = \alpha$. Объёмы газа в точках 2 и 4 равны.



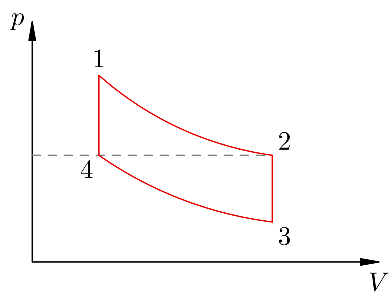
$T_3/T_1 = \sqrt{\alpha}$

Задача 14. (*МФТИ, 1995*) На диаграмме зависимости давления p от объёма V для некоторой массы идеального газа две изобары и две изохоры пересекаются в точках 1, 2, 3 и 4 (см. рисунок). Найти температуры газа T_1 и T_3 в точках 1 и 3, если точки 2 и 4 лежат на прямой, проходящей через начало координат, а температуры газа в этих точках равны соответственно T_2 и T_4.



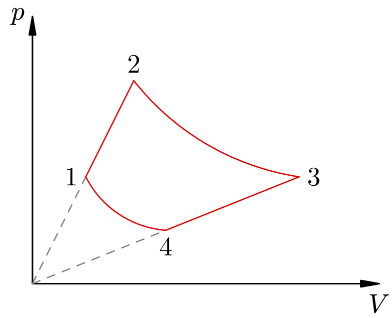
$T_1 = T_3 = \sqrt{T_2 T_4}$

Задача 15. (*МФТИ, 1995*) На диаграмме зависимости давления p от объёма V для некоторой массы идеального газа две изотермы пересекаются двумя изохорами в точках 1, 2, 3 и 4 (см. рисунок). Найти отношение давлений p_3/p_1 в точках 3 и 1, если отношение температур в этих точках $T_3/T_1 = \beta$. Давления газа в точках 2 и 4 равны.



$p_3/p_1 = \beta^2$

Задача 16. (*МФТИ, 1995*) Диаграмма зависимости давления p от объёма V для некоторой массы идеального газа состоит из двух изотерм и двух отрезков прямых, проходящих через начало координат (см. рисунок). Найти объём газа V_4 в состоянии 4, если известны его объёмы V_1, V_2 и V_3 в состояниях 1, 2 и 3 соответственно.

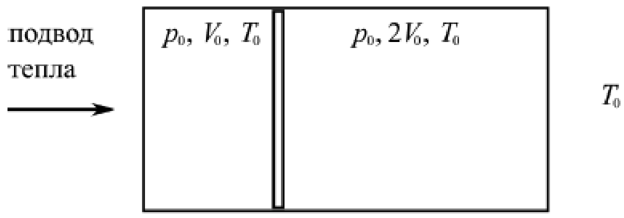


$V_4 = \frac{V_1 V_3}{V_2}$

Задача 17. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) В вертикальном цилиндре с гладкими стенками под подвижным поршнем, расположенным на высоте $h_0 = 63$ см над дном цилиндра, находится гелий. На поршень медленно насыпали песок. В результате высота положения поршня уменьшилась до $h_1 = 21$ см. Затем треть песка аккуратно убрали. На какой высоте теперь располагается поршень? Температура содержимого цилиндра и давление воздуха над цилиндром оставались неизменными.

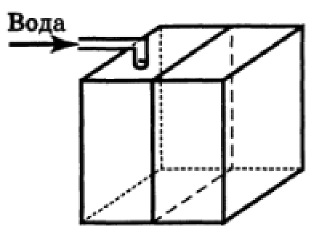
$h = \frac{3h_0 h_1}{2h_0 + h_1} = 27$ см

Задача 18. (*«Курчатов», 2018, 10*) Герметичный цилиндрический сосуд расположен горизонтально и разделён на две части лёгким теплонепроницаемым поршнем, свободно перемещающимся без трения. Боковые стенки сосуда теплоизолированы, а через торцы возможна теплопередача. В обоих частях сосуда находится идеальный газ, начальная температура и давление равны T_0 и p_0 соответственно, начальный объём левой части сосуда равен V_0, правой части — $2V_0$. Газ слева от поршня начинают нагревать через левый торец, а газ справа от поршня свободно обменивается теплом с окружающей средой, температура которой остаётся постоянной и равной T_0 (рис.).



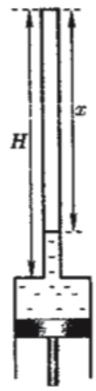
Постройте на pV-диаграмме график процесса, происходящего с газом в левой части сосуда. Приведите необходимые пояснения.

Задача 19. (*Всеросс., 1992, ОЭ, 10*) Воздух, заполняющий кубический резервуар, находится при нормальных условиях. Длина ребра резервуара $a = 1$ м. Резервуар разделили на две равные части, поместив в него тонкий поршень (рис.). В левую половину резервуара медленно наливают воду. Уровень воды достиг высоты $h = a/2$. На какое расстояние сместился при этом поршень? Трения нет. Давлением пара можно пренебречь. Резервуар находится в изотермических условиях.



$x \approx 17$ см

Задача 20. (*Всеросс., 2006, ОЭ, 10*) Сосуд, состоящий из двух цилиндрических участков разного диаметра, запаян с узкого конца. Широкой частью он насажен на гладкий неподвижный поршень (рис.). Образовавшаяся герметичная полость частично заполнена водой, так что вода присутствует и в верхней части сосуда, а остальной объём занимает воздух при давлении $p_0 = 140$ кПа. Система находится в равновесии. На торец узкой части сосуда поместили гирю массой, равной массе пустого сосуда. Когда система вновь пришла в равновесие при неизменной температуре, оказалось, что сосуд опустился на $\Delta h = 7$ см. Найдите в этом состоянии высоту x столба воздуха в сосуде. Полная длина узкой части сосуда $H = 5$ м, площадь её поперечного сечения составляет $\alpha = 0{,}1$ от площади сечения широкой части. Атмосферное давление $p_{атм} = 1$ атм $= 100$ кПа.



$x = 1{,}74$ м

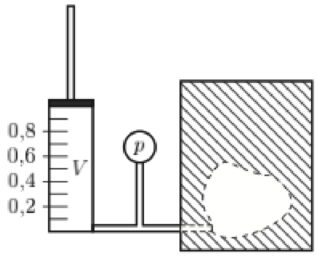
Задача 21. (*Всеросс., 2007, ОЭ, 10*) К поршню, который делит герметичный горизонтальный цилиндр на два отсека равной длины, прикреплён шток, проходящий через отверстие в торце цилиндра (рис.). Начальное давление воздуха в отсеках одинаково и равно внешнему. Найдите, на какую долю x первоначальной длины отсека сместится поршень, если внешнее давление изменить в n раз. Проведите расчёт для $n_1 = 50$ и $n_2 = 1/50$. Отношение площади s штока к площади S поршня: $\alpha = s/S = 0{,}02$. Температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной. Трение не учитывайте.

$x = \frac{\alpha-2+\sqrt{(2-\alpha)^2+4n(n-1)\alpha^2}}{2n\alpha}$; $x_1 \approx 0{,}41$; $x_2 \approx -0{,}01$

Задача 22. (*Всеросс., 2013, РЭ, 10*) Воздушный шарик радиусом $r = 12$ см надут до давления $p_0 = 1{,}2 \cdot 10^5$ Па. Масса оболочки $M = 20$ г. Шарик погружают в глубокую воду на некоторую глубину h. При каком значении h шарик начнёт тонуть? Считайте, что температура воды $t = 4\,°$C и её плотность $\rho = 10^3$ кг/м^3 не зависят от глубины. Воздух считайте идеальным газом.

$h = \frac{1}{g}\left(\frac{p_0V_0}{M+\frac{p_0V_0\mu}{RT}} - \frac{p_{атм}}{\rho}\right) = 2793$ м; здесь $V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3$

Задача 23. (*Всеросс., 2010, РЭ, 10*) В толстой бетонной стене была обнаружена внутренняя полость. Для определения её объёма в стене просверлили тонкое отверстие, соединяющее полость с атмосферой. Через это отверстие тонким шлангом полость герметично соединили с поршневым насосом и манометром (см. рисунок). В начальном состоянии поршень насоса находился в верхнем положении, а давление в системе насос—полость равнялось атмосферному. Затем была исследована зависимость $p(V)$ давления в системе от объёма воздуха в насосе. Полученные экспериментальные результаты представлены в таблице.

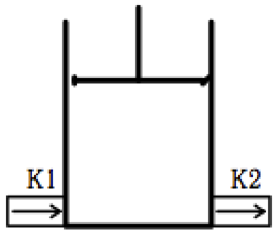


V, л	p, кПа
1,0	100
0,8	110
0,6	130
0,4	150
0,2	175

Путём графического анализа результатов эксперимента определите объём внутренней полости. Погрешность измерения давления в данном эксперименте составляла 3%. Погрешностью определения объёма под поршнем насоса можно пренебречь. Уменьшение объёма насоса производилось квазистатически, то есть настолько медленно, что температуру воздуха в системе насос—полость на протяжении всего эксперимента можно считать равной температуре окружающей среды.

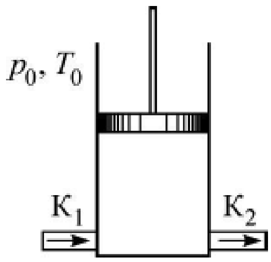
0,82 ± 0,05 л

Задача 24. (*МОШ, 2015, 11*) В цилиндре с поршнем, где находится воздух, имеются два клапана: впускной К1 и выпускной К2. Система клапанов работает таким образом, что давление в цилиндре поддерживается в промежутке от $0{,}8p_0$ до $1{,}4p_0$, где $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па — атмосферное давление: как только давление в цилиндре падает ниже $0{,}8p_0$, открывается впускной клапан, и давление становится равным $0{,}8p_0$; при превышении давлением значения $1{,}4p_0$ открывается выпускной клапан, и давление падает до $1{,}4p_0$. Поршень совершает очень медленные колебания, в процессе которых объём воздуха в цилиндре изменяется в пределах от V_0 до $2V_0$, где $V_0 = 22{,}4$ л. Постройте график зависимости давления воздуха в цилиндре от его объёма в данном процессе. Объясните Ваше построение. Считайте, что с момента начала опыта уже прошло несколько колебаний. Определите наименьшее и наибольшее число молей воздуха в цилиндре. Температура постоянна и равна $T_0 = 273$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).



См. конец листка

Задача 25. (*МОШ, 2016, 10*) В цилиндре под поршнем находится воздух. В стенках цилиндра есть два клапана: впускной $К_1$ и выпускной $К_2$. Впускной клапан открывается тогда, когда разность давлений воздуха снаружи и внутри цилиндра превышает $\Delta_1 = 0{,}2p_0$, где p_0 — атмосферное давление. Выпускной клапан открывается тогда, когда разность давлений внутри и снаружи превышает $\Delta_2 = 0{,}4p_0$. Поршень совершает очень медленные колебания так, что объём воздуха в цилиндре изменяется в пределах от V_0 до $2V_0$. Температура снаружи и внутри цилиндра постоянна и равна T_0.



1) Определите наименьшее и наибольшее количество воздуха в цилиндре при колебаниях поршня.

2) Изобразите в координатах pV процесс, происходящий с воздухом в цилиндре после того, как поршень уже совершил достаточно много колебаний.

Ответьте на оба вопроса задачи, если $\Delta_1 = 0{,}4p_0$, а $\Delta_2 = 0{,}2p_0$.

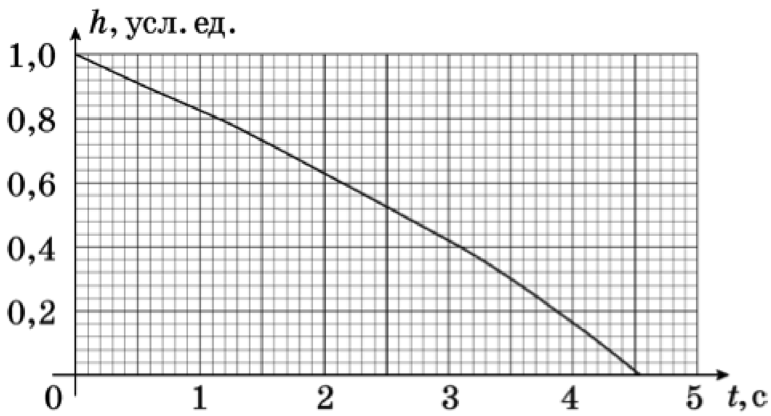
1) В первом случае $\nu_{max} = \frac{8p_0V_0}{5RT_0}$ и $\nu_{min} = \frac{7p_0V_0}{5RT_0}$, во втором случае $\nu = \text{const} = \frac{6p_0V_0}{5RT_0}$; 2) См. конец листка

Задача 26. (*Всеросс., 2018, РЭ, 10*) Со дна глубокого озера всплывает пузырёк воздуха. На него действует сила сопротивления $F = krv$, где r — радиус пузырька, v — его скорость, k — постоянная. Вблизи дна радиус пузырька $r_0 = 1{,}0$ мм. На рисунке представлен график зависимости глубины h, на которой находится пузырёк, от времени t, прошедшего от начала его движения.

1) Какова глубина озера?

2) За какое время τ_1 всплывёт пузырёк, радиус которого у дна водоёма равен $r_1 = 0{,}5$ мм?

3) За какое время τ_2 пузырёк, радиус которого у дна водоёма равен $r_0 = 1{,}0$ мм, всплывёт со дна водоёма глубиной $H = 10$ м?

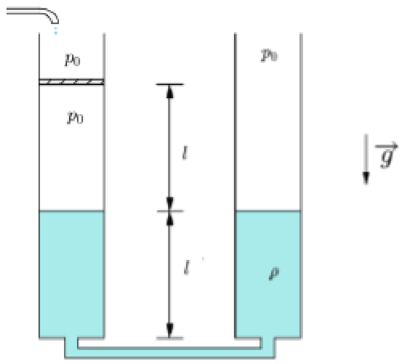


Примечание 1. Давление водяных паров в пузырьке, поверхностное натяжение воды, изменение формы пузырька и изменение температуры воздуха в пузырьке не учитывайте.

Примечание 2. Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, атмосферное давление $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па, $g = 10$ м/с^2, объём пузырька $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

1) $h_0 = 14$ м; 2) $\tau_1 = 18$ с; 3) $\tau_2 = 3{,}3$ с

Задача 27. (*Всеросс., 2017, РЭ, 11*) В двух сообщающихся одинаковых вертикальных цилиндрических сосудах находится жидкость плотности ρ. Первоначальный уровень жидкости в сосудах $l = 10$ см от дна (рис.). Сосуды соединены через отверстия в середине дна маленькой трубочкой пренебрежимо малого объёма. В левом сосуде на высоте $2l$ от дна находится невесомый поршень, который может свободно перемещаться без трения о стенки. Под поршнем находится воздух при атмосферном давлении $p_0 = 2\rho g l$. С момента времени t_0 в левый сосуд в пространство над поршнем начинает поступать та же жидкость, причём скорость прироста уровня воды над поршнем составляет $v = 0{,}2$ мм/с.



1) С какой скоростью движется поверхность жидкости в правом сосуде в начале процесса?

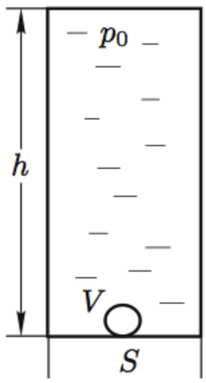
2) С какой скоростью и куда движется поверхность жидкости над поршнем в начале процесса?

3) На какой высоте z от дна сосуда будет находиться поверхность жидкости над поршнем: а) через 600 с? б) через 1100 с?

Температуру в сосудах можно считать постоянной. Жидкость из сосудов не выливается.

1) $\frac{v}{2}$; 2) ≈ 0; 3а) 22,25 см; 3б) 22 см

Задача 28. (*Всеросс., 2007, финал, 10*) В высоком закрытом вертикально расположенном цилиндрическом сосуде сечением S и высотой h находится вода, занимающая весь объём сосуда, кроме маленького пузырька воздуха объёмом V, образовавшегося у дна (рис.). Давление воды в верхней части сосуда равно атмосферному давлению p_0. Определите, каким будет давление воды в верхней части сосуда после того, как пузырёк поднимется вверх. Процесс считать изотермическим. Модуль всестороннего сжатия жидкости равен K. Рассмотрите предельные переходы:



1) $V \to 0$,

2) $K \to 0$ (сильно сжимаемая жидкость),

3) $K \to \infty$ (несжимаемая жидкость).

Найдите численное решение задачи для случая $h = 3$ м, $S = 10$ см^2, $V = 0{,}2$ см^3, $K = 2 \cdot 10^9$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, $g = 10$ м/с^2.

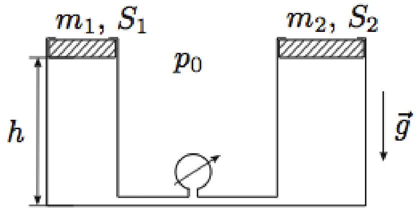
Примечание. Модуль всестороннего сжатия жидкости K определяется соотношением

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V_ж}{V_ж},$$

где Δp — изменение давления, $|\Delta V_ж / V_ж| = \varepsilon$ — относительное изменение объёма жидкости.

$p = \frac{1}{2}\left(p_0 - \frac{KV}{Sh} + \sqrt{\left(p_0 + \frac{KV}{Sh}\right)^2 + \frac{4\rho g K V}{S}}\right)$; 1) $p \to p_0$; 2) $p \to p_0$; 3) $p \to p_0 + \rho g h$; $p = 117$ кПа

Задача 29. (*Всеросс., 2013, финал, 10*) Два вертикальных цилиндрических сосуда соединены в нижней части трубкой с манометром пренебрежимо малого объёма (рис.). Внутри цилиндров установлены поршни, в верхней части цилиндров — упоры, ограничивающие подъём поршней. Расстояния от нижней части поршней до дна цилиндров при верхнем расположении поршней одинаковы и равны $h = 1$ м. Под поршнями находится один моль идеального газа, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Поршни могут перемещаться в цилиндрах без трения.



t, °C	−50,0	−32,4	27,8	174,7	264,1
p, 10^5 Па	2,0	2,0	2,5	2,5	3,0

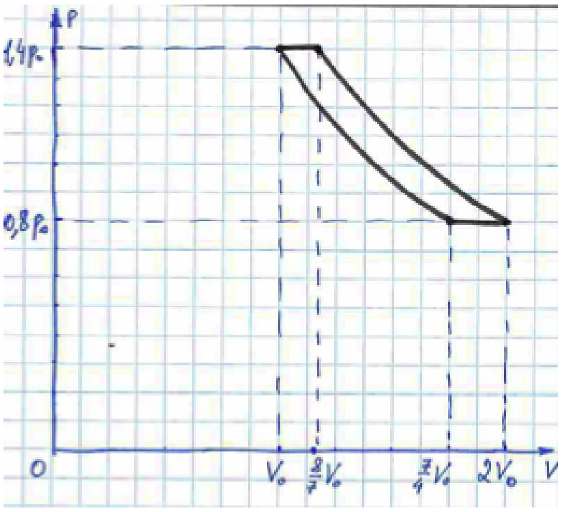
В таблице представлены результаты измерений давления в цилиндрах при пяти различных значениях температуры газа.

Определите массы обоих поршней m_1, m_2 и площади сечения цилиндров S_1, S_2.

$m_1 = 100$ кг, $m_2 = 75$ кг, $S_1 = 100$ см^2, $S_2 = 75$ см^2

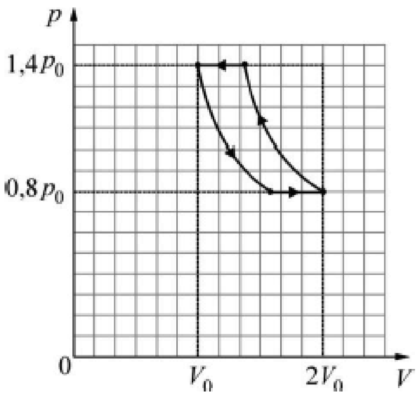
Ответ к задаче 24

График процесса после нескольких колебаний:

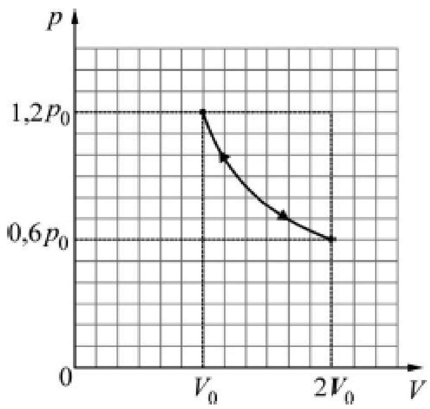


Наименьшее число молей воздуха в цилиндре равно 1,4, наибольшее — 1,6.

Ответ к задаче 25



Случай 1



Случай 2