

Интеграл. Электродинамика

Данный листок посвящён применению интеграла в задачах электродинамики.

ЗАДАЧА 1. Покажите, что потенциальная энергия кулоновского взаимодействия точечных зарядов q_1 и q_2 имеет вид $W = kq_1q_2/r$, где r — расстояние между зарядами. (Величины q_1 и q_2 могут быть как положительными, так и отрицательными!)

ЗАДАЧА 2. Выведите формулу для энергии заряженного конденсатора: $W = q^2/(2C)$.

ЗАДАЧА 3. Покажите, что любой заряженный проводник обладает энергией $W = q\varphi/2$, где q — заряд проводника, φ — его потенциал.

Указание. Потенциал проводника прямо пропорционален его заряду: $\varphi = \alpha q$.

ЗАДАЧА 4. Сила тока в цепи за время t равномерно увеличилась от нуля до I . Какой заряд прошёл по цепи за это время?

$$\boxed{q = \frac{I t}{2} = b}$$

ЗАДАЧА 5. В проводнике сопротивлением 40 Ом сила тока линейно возросла от начального значения 5 А до конечного значения 25 А в течение 10 с. Какое количество теплоты выделилось в проводнике за это время?

$$\boxed{Q = 2500 \text{ Дж} = c}$$

ЗАДАЧА 6. Найдите напряжённость поля равномерно заряженного тонкого кольца радиуса a в точке, находящейся на оси кольца на расстоянии r от центра. Заряд кольца равен q . Какой вид приобретает формула при $r \gg a$?

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = d}$$

ЗАДАЧА 7. Найдите напряжённость поля равномерно заряженного тонкого диска радиуса a в точке, находящейся на оси диска на расстоянии r от центра. Заряд диска равен q . Покажите, что при $r \gg a$ полученная формула переходит в формулу напряжённости поля точечного заряда, а при $r \ll a$ — в формулу напряжённости поля заряженной плоскости.

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qz}{(a^2+z^2)^{3/2}} = e}$$

ЗАДАЧА 8. Найдите напряжённость поля бесконечно длинной равномерно заряженной тонкой нити: а) по теореме Гаусса; б) непосредственным интегрированием. Точка наблюдения находится на расстоянии r от нити. Линейная плотность заряда нити равна λ .

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = f}$$

ЗАДАЧА 9. Найдите напряжённость поля равномерно заряженной плоскости: а) по теореме Гаусса; б) непосредственным интегрированием. Точка наблюдения находится на расстоянии r от плоскости. Поверхностная плотность заряда плоскости равна σ .

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = g}$$

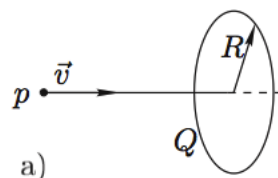
ЗАДАЧА 10. Найдите напряжённость поля равномерно заряженного тонкого стержня длины $2a$ в точке, находящейся на серединном перпендикуляре к стержню на расстоянии r от стержня. Заряд стержня равен q . Покажите, что при $r \gg a$ полученная формула переходит в формулу напряжённости поля точечного заряда, а при $r \ll a$ — в формулу напряжённости поля длинной заряженной нити.

$$\frac{z^2 + z^4}{b^2} = \mathcal{E}$$

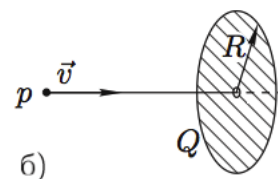
ЗАДАЧА 11. Найдите напряжённость поля равномерно заряженной тонкой прямоугольной пластины в точке, находящейся на перпендикуляре к пластине, проходящем через её центр. Поверхностная плотность заряда пластины равна σ , размеры пластины $2a \times 2b$, расстояние до точки наблюдения равно r . Покажите, что при $r \gg a, b$ полученная формула переходит в формулу напряжённости поля точечного заряда, а при $r \ll a, b$ — в формулу напряжённости поля заряженной плоскости.

$$\left(\frac{(z^2 + z^4)(z^2 + z^4)}{q^2} \right) \text{цирле о зкн} = \mathcal{E}$$

ЗАДАЧА 12. (Всеросс., 2008, финал, 10) 1) Тонкое кольцо радиусом $R = 5$ см однородно заряжено зарядом $Q = +10^{-8}$ Кл (рис. а). Какую минимальную скорость v_{\min} нужно сообщить протону, находящемуся вдали от кольца, чтобы он пролетел по оси кольца через его центр?



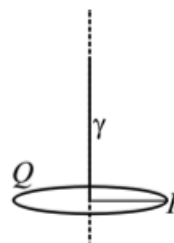
2) Пусть теперь заряд $Q = +10^{-8}$ Кл равномерно распределён по поверхности тонкого диска радиуса $R = 5$ см (рис. б). В центре диска имеется небольшое отверстие. Какую минимальную скорость нужно сообщить протону в этом случае, чтобы он пролетел через отверстие в диске?



Элементарный заряд $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27}$ кг, электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

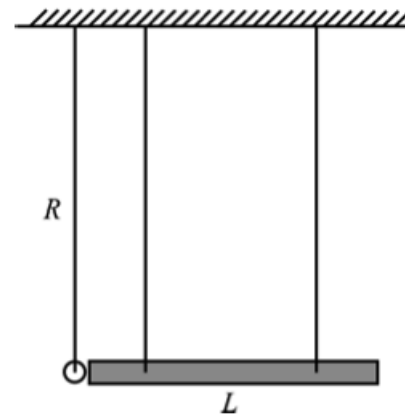
$$\frac{z^2 + z^4}{b^2} = \frac{z^2 + z^4}{b^2} \left(\frac{z^2 + z^4}{q^2} \right) \text{цирле о зкн} = \mathcal{E}$$

ЗАДАЧА 13. (МОШ, 2010, 10) Тонкое кольцо радиусом R заряжено зарядом Q , равномерно распределённым по кольцу. Вдоль оси кольца расположена очень длинная нить, начинающаяся в его центре и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда γ (см. рисунок). Найти модуль силы электростатического взаимодействия нити с кольцом.



$$\frac{\gamma}{b^2 \gamma} = \mathcal{E}$$

Задача 14. (МОШ, 2011, 10) Маленький шарик и тонкий непроводящий стержень длиной L , массы которых m одинаковы, подвешены к потолку на нитях одинаковой большой длины $R \gg L$ (см. рисунок). Нити позволяют шару и стержню двигаться только в одной вертикальной плоскости. Сначала шарик и стержень не были заряжены и висели так, что почти соприкасались друг с другом, причем шарик находился возле одного из концов стержня. Шару и стержню сообщили одинаковые электрические заряды Q , причем заряд на стержне распределили равномерно по его длине. На каком расстоянии x окажутся в положении равновесия шарик и тот конец стержня, возле которого шарик сначала находился? Считайте, что диаметр шарика много меньше x , а x много меньше длины стержня.

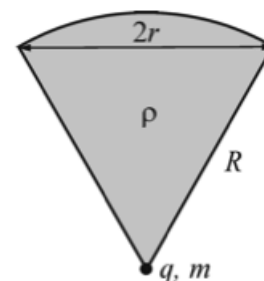


$$\frac{\tau b m}{\mu \epsilon \tau} \wedge \varnothing \approx x$$

Задача 15. (МОШ, 2011, 11) Тонкий жёсткий непроводящий стержень длиной L несёт на себе электрический заряд Q , который равномерно распределён по длине стержня. Маленький шарик имеет электрический заряд q и прикреплен к одному из концов стержня тонкой непроводящей и незаряженной нитью длиной R . Какова сила натяжения нити, если система находится в равновесии? Считать, что $Q/q > 0$. Силу тяжести не учитывать.

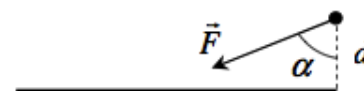
$$\frac{(\tau + \mu) \mu}{b \varnothing \epsilon} = L$$

Задача 16. («Курчатов», 2015, 10) Жители далекой планеты τ -Кита используют в качестве пушки устройство, которое работает на основе явления взаимодействия заряженных тел. Они вырезают из равномерно заряженного по объёму шара радиусом R сектор, ограниченный конусом с радиусом r при его основании. Объёмная плотность заряда «пушки» равна $\rho > 0$. К закреплённому оружию подносится маленькая дробинка массой m с зарядом $q > 0$, как показано на рисунке. Потом дробинку отпускают. Определите ускорение дробинки a_0 в момент сразу после её отпущания.



$$\frac{\mu \mu \varnothing \epsilon \tau}{\tau \wedge b d} = \varnothing \nu$$

Задача 17. («Росатом», 2012, 11) Точечный заряд находится на расстоянии d напротив края стержня длиной $10d$, равномерно заряженного зарядом противоположного знака. Найти угол α между вектором силы, действующей на заряд со стороны стержня, и перпендикуляром, опущенным из точки, где находится заряд, на стержень (см. рисунок). Ответ обосновать.



$$\varnothing \Gamma \varnothing \tau \varnothing \epsilon \frac{\tau}{\Gamma} = \nu$$

ЗАДАЧА 18. («Росатом», 2011, 11) Две равномерно заряженные полусферы расположены так, что они имеют общий центр, и одна из них вложена в другую (см. рисунок; внутренняя полусфера показана пунктиром). Радиусы полусфер равны R и $3R$, заряды $-Q$ и $2Q$ соответственно. Найти силу взаимодействия полусфер.



$$\boxed{F = \frac{3kQ^2}{8R^2}}$$