

Импульс

Импульсом тела (принимаемого за материальную точку) называется вектор $\vec{p} = m\vec{v}$, где m — масса тела, \vec{v} — вектор его скорости. Оговорка про материальную точку принципиальна: если тело нельзя считать материальной точкой, то разные его части могут двигаться с разными скоростями, и тогда непонятно, что называть «скоростью» тела¹.

Второй закон Ньютона для нашей материальной точки

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

можно записать в виде $\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$ (константу m мы внесли под знак производной) или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (1)$$

Таким образом, скорость изменения вектора импульса тела равна силе, приложенной к телу.

Пусть два тела 1 и 2 образуют замкнутую систему, то есть взаимодействуют лишь друг с другом (а взаимодействием этих тел с другими телами можно пренебречь). Запишем для каждого из этих тел второй закон Ньютона (1)

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{T}_{12}, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{T}_{21},$$

где \vec{T}_{12} — сила, приложенная к первому телу со стороны второго, а \vec{T}_{21} — сила, приложенная ко второму телу со стороны первого. По третьему закону Ньютона имеем $\vec{T}_{12} + \vec{T}_{21} = \vec{0}$, откуда

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{0}$$

или

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{0}.$$

Последнее означает, что вектор $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ не меняется со временем:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.}$$

Мы получили *закон сохранения импульса* для двух материальных точек, образующих замкнутую систему.

Предположим теперь, что тела 1 и 2 не образуют замкнутую систему и взаимодействуют с другими (*внешними*) телами. Пусть \vec{F}_1 — результирующая сила, приложенная к первому телу со стороны внешних тел, а \vec{F}_2 — результирующая сила, приложенная ко второму телу со стороны внешних тел. Тогда

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{T}_{12}, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{T}_{21}.$$

Складывая, получим

$$\frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (2)$$

¹Описанию движения тел, не являющихся материальными точками, посвящены листки «Системы материальных точек», «Центр масс» и «Движение с переменной массой».

Суммарный импульс $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$, как видим, теперь не сохраняется. Однако может случиться, что проекция суммы сил $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ на некоторую ось x равна нулю. В таком случае

$$\frac{dp_{1x}}{dt} + \frac{dp_{2x}}{dt} = 0,$$

то есть сохраняется проекция суммарного импульса тел на ось x .

Типичным примером последней ситуации является выстрел под углом к горизонту из пушки, расположенной на гладкой горизонтальной поверхности. Горизонтальные внешние силы, действующие на систему «снаряд+пушка», отсутствуют, поэтому сохраняется проекция суммарного импульса на горизонтальную ось. Однако *вектор* суммарного импульса снаряда и пушки *не сохраняется* — ведь после выстрела появилась вертикальная составляющая импульса снаряда, которой вначале не было. За счёт чего она появилась? За счёт того, что сила реакции опоры N , действующая на пушку, во время выстрела превышает силу тяжести, действующую на нашу систему (а почему превышает? — потому что снаряд, вылетая, «вдавливает» пушку в землю).

Соотношению (2) можно придать более компактную форму. Обозначим $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ суммарный импульс тел (который назовём *импульсом системы* тел 1 и 2) и $\vec{F}_{\text{внеш}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ — сумму внешних сил, приложенных к телам 1 и 2. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}, \quad (3)$$

что по форме совпадает с уравнением (1) (но по сути, конечно же, от него отличается).

ЗАДАЧА 1. («Физтех», 2014, 11) По гладкой горизонтальной поверхности движутся с перпендикулярными скоростями два маленьких шарика. Массы шариков $3m$ и $2m$, их скорости 1 м/с и 2 м/с соответственно. Шарики сталкиваются и прилипают друг к другу. Найдите скорость образовавшегося тела.

с/м I

ЗАДАЧА 2. (МФТИ, 2007) К неподвижной тележке, находящейся на горизонтальной поверхности, бегут мальчик массой m и девочка массой $0,8m$. Мальчик запрыгивает на тележку. Девочка нагоняет уже движущуюся тележку и тоже запрыгивает на неё. Скорость тележки увеличивается на 60%. Во сколько раз масса тележки больше суммарной массы мальчика и девочки? Горизонтальные составляющие скоростей мальчика и девочки относительно поверхности Земли перед попаданием на тележку одинаковы. Сопротивлением движению тележки пренебречь. Направления всех движений находятся в одной вертикальной плоскости.

в 3 раза

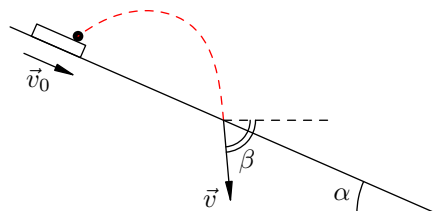
ЗАДАЧА 3. (МФТИ, 1991) Искусственный спутник Луны массой $M = 8$ кг движется вблизи её поверхности по круговой орбите. Метеорит массой $m = 0,1$ г, летящий со скоростью $v = 40$ км/с, перпендикулярной скорости спутника, попадает в спутник и застревает в нём. На какой угол повернётся из-за этого вектор скорости спутника? Радиус Луны $R = 1740$ км. Ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

$$\text{рад } \varphi \approx 10^{-4} \approx \left(\frac{9/16 \sqrt{M}}{m} \right) \arctg \varepsilon = v$$

ЗАДАЧА 4. (МФТИ, 1991) Космический аппарат массы $M = 40$ кг движется по круговой орбите радиуса $R = 6800$ км вокруг Марса. В аппарат попадает и застревает в нём метеорит, летевший со скоростью $v = 50$ км/с перпендикулярно направлению движения аппарата. При какой массе метеорита отклонение в направлении движения аппарата не превысит угол $\alpha = 10^{-4}$ рад? Масса Марса $M_0 = 6,4 \cdot 10^{23}$ кг. Гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²).

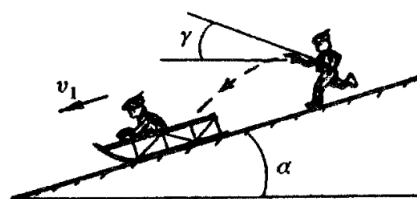
$$\gamma \frac{M_0}{R^2} = \frac{v}{v_0} \frac{a}{R} \gg u$$

ЗАДАЧА 5. (МФТИ, 1991) Сани с седоком и собакой общей массой M съезжают с постоянной скоростью v_0 с горы, имеющей уклон α ($\cos \alpha = 6/7$). Собака массой m прыгает с саней вперёд по ходу их движения и приземляется на склон, имея скорость v , направленную под углом β к горизонту ($\cos \beta = 3/7$). Сани после этого продолжают двигаться по горе вниз. Найти скорость саней с седоком после прыжка собаки.



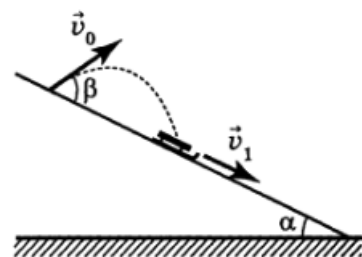
$$\frac{(u - v) \cos \alpha}{a u \cos \alpha - v_0 \cos \alpha} = \frac{v \cos \alpha (u - v)}{g \cos \alpha a u - v_0 \cos \alpha} = n$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 1991) Мальчик массой t съезжает на санках массой M с постоянной скоростью v_1 (см. рисунок) с горы, имеющей уклон α ($\cos \alpha = 8/9$). Другой мальчик такой же массы t бежит за санками и запрыгивает в них, имея в начале прыжка скорость, направленную под углом γ ($\cos \gamma = 7/9$) к горизонту. В результате этого санки с мальчиками движутся по горе со скоростью v_2 . Найти скорость прыгнувшего мальчика в начале прыжка.



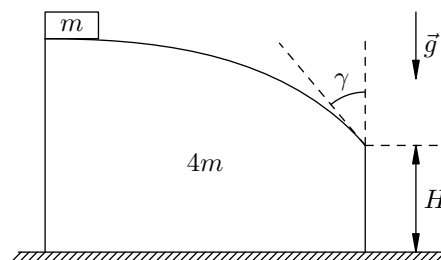
$$\frac{u \cos \alpha}{v \cos \alpha} = \frac{u}{v \cos \alpha} = \frac{u \cos \alpha (u + v)}{v \cos \alpha (u + v) - t \cos \alpha (u \cos \alpha + v)} = n$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2000, ОЭ, 11) С горки с углом наклона к горизонту α съезжают по кратчайшему пути с постоянной скоростью v_1 санки массой M (рис.). За санками бежит собака массой t и запрыгивает на них. В начале прыжка её скорость v_0 и направлена под углом β к поверхности горки. Найдите скорость санок с собакой, если известно, что санки после соприкосновения с собакой не останавливались.



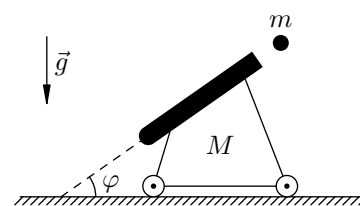
$$\frac{v \cos \alpha (u + v)}{(v - g) \cos \alpha a u + v \cos \alpha} = a$$

Задача 8. (МФТИ, 2002) Горка массой $4m$ с шайбой массой m покоятся на гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). От незначительного толчка шайба начинает скользить по горке без трения, не отрываясь от неё, и покидает горку. Горка, не отрывавшаяся от стола, приобретает скорость u . С какой скоростью шайба упадёт на стол? Нижняя часть поверхности горки составляет угол 30° с вертикалью и находится на расстоянии H от поверхности стола. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.



$$\frac{u}{g} + \frac{H}{g} = \frac{m}{4m}$$

Задача 9. (МФТИ, 2002) Игрушечная пушка может скользить по рельсам, укрепленным на горизонтальном полу. Ствол пушки наклонён под углом φ к горизонту (см. рисунок). Масса пушки без снаряда равна M , масса снаряда — m . Из покоившейся пушки произведён выстрел. В результате пушка, не отрывавшаяся от рельсов, получила скорость u . На каком расстоянии от места выстрела снаряд упал на пол? Высоту пушки не учитывать. Направления всех движений параллельны плоскости рисунка.



$$\frac{u}{g} = \frac{m}{M} \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

Задача 10. (Всеросс., 2006, финал, 11) Пушечный снаряд массой $M = 100$ кг разорвался в некоторой точке траектории на два осколка, разлетевшихся с импульсами $p_1 = 3,6 \cdot 10^4$ кг · м/с и $p_2 = 2,4 \cdot 10^4$ кг · м/с. Импульсы осколков направлены под углом $\alpha = 60^\circ$ друг к другу. Определите, при каком отношении масс осколков выделившаяся при взрыве кинетическая энергия будет минимальной. Найдите эту энергию.

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{3,6 \cdot 10^4}{2,4 \cdot 10^4} = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 1,5$$