

Гравитация

ЗАДАЧА 1. (*МФТИ, 1987*) С какой скоростью должен был бы лететь самолёт вдоль экватора, чтобы сила давления сидящих пассажиров на кресла самолёта уменьшилась на четверть по сравнению силой давления перед взлётом? Радиус Земли принять равным $R = 6400$ км. Собственным вращением Земли и высотой полёта по сравнению с радиусом Земли пренебречь.

$$v/\text{км/с} \approx \sqrt{gR} \approx 80$$

ЗАДАЧА 2. (*«Физтех», 2016, 9*) На какой высоте, считая от поверхности Земли, ускорение свободного падения на 19% меньше, чем на поверхности Земли? Радиус Земли равен R .

$$h/R = 0.19$$

ЗАДАЧА 3. (*«Физтех», 2016, 9*) Радиус планеты равен R . На какой высоте, считая от поверхности планеты, скорость спутника, движущегося по круговой орбите, будет в 2 раза меньше первой космической скорости для этой планеты?

$$h = 3R$$

ЗАДАЧА 4. (*МОШ, 2007, 9*) Марс удобнее всего изучать во время противостояния, когда Земля находится между Марсом и Солнцем. Определите, через какой промежуток времени повторяются противостояния Марса. Ответ выразите в земных годах. Расстояние от Марса до Солнца в $n = 1,53$ раза превосходит расстояние от Земли до Солнца. Считайте, что орбиты Земли и Марса являются круговыми.

$$T \approx 2,12 \text{ земных лет}$$

ЗАДАЧА 5. (*МОШ, 2009, 9*) Оцените, на какой широте наблюдатель не сможет видеть ни одного спутника Земли, находящегося на геостационарной орбите, то есть как бы «висящего» над одной точкой земной поверхности. Радиус Земли равен R , ускорение свободного падения на поверхности Земли — g , период обращения (сутки) — T .

$$\left(\frac{gR^3}{gT^2} \right)^{\cos \phi} < 1$$

ЗАДАЧА 6. (*«Курчатов», 2016, 10*) Астроном-любитель Вася следит за движением двух искусственных спутников Земли, летающих на одной и той же высоте $h = 300$ км над экватором по круговым орбитам. Спутники пролетают точно над наблюдателем. Вася измеряет периоды движения этих спутников (промежутки времени между последовательными «пролётами» над ним). Оказалось, что эти периоды заметно отличаются. Какова разница этих периодов?

Модуль ускорения свободного падения у поверхности Земли $g = 9,8$ м/с², радиус Земли равен $R_0 = 6,4 \cdot 10^6$ м.

$$\Delta T \approx \frac{2\pi R_0}{g} \approx 12 \text{ мин}$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 2005, финал, 10) «Двойная звезда» состоит из двух звёзд, находящихся на постоянном расстоянии друг от друга. Космонавт Глюк решил вывести космический корабль на орбиту таким образом, чтобы он находился всё время на отрезке, соединяющем звёзды, на постоянном расстоянии от каждой из звёзд и расходовал при этом минимальное количество топлива. Проведя все расчёты, Глюк нашёл, что корабль должен находиться на расстоянии l_1 от первой звезды и l_2 от второй, и успешно вывел корабль на орбиту. Чему равно отношение M_1/M_2 масс звёзд?

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{M_1}{M_2}$$

ЗАДАЧА 8. (Всеросс., 2000, ОЭ, 10) Плотность вещества некоторой планеты, имеющей форму шара радиуса $R = 6400$ км, зависит только от расстояния до центра планеты. При бурении скважины глубиной несколько десятков километров обнаружилось, что ускорение свободного падения не зависит от глубины погружения под поверхность планеты. Найдите плотность вещества, из которого состоит поверхность планеты, если средняя плотность планеты, равная отношению её массы к объёму, равна $\rho = 5,5$ г/см³.

$$\rho_{\text{поверх}} = \rho$$

ЗАДАЧА 9. Считая планету однородным шаром с плотностью ρ , найдите минимальный период обращения её спутника.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

ЗАДАЧА 10. (Всеросс., 2002, финал, 9) Космический зонд «Шумейкер» на некоторое время должен стать спутником астероида Эрос. По расчётам он будет обращаться вокруг астероида на высоте, составляющей $n = 1/15$ радиуса Эроса, с периодом $T = 4,5$ часа. Определите предполагаемую среднюю плотность астероида ρ . Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг².

$$\rho = \frac{3}{4\pi n^3} \frac{G}{T^2}$$

ЗАДАЧА 11. («Росатом», 2011, 11) Спутник массой m движется вокруг планеты массой M по круговой орбите радиуса R со скоростью, вдвое превышающей первую космическую скорость для данной орбиты. Чему равна и куда направлена сила тяги, которую развивает двигатель спутника?

$$F = 3 \frac{GMm}{R^2}, \text{ к центру планеты}$$

ЗАДАЧА 12. Банан перевезли с экватора на полюс. Оцените относительное изменение $\Delta P/P$ веса банана за счёт суточного вращения Земли.

$$\Delta P/P \approx 10^{-3}$$

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 1979) При какой продолжительности суток тела на экваторе Земли весили бы в два раза меньше, чем на полюсе? Радиус Земли $R = 6400$ км.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 1987) При какой продолжительности суток на Земле тела на экваторе были бы невесомы? Радиус Земли $R = 6400$ км.

$$\text{ниж } \tau \approx \frac{6}{\pi} \sqrt{\frac{R}{g}} = T$$

ЗАДАЧА 15. (МОШ, 2006, 7) Найдите примерную величину давления в центре Земли, считая, что средняя плотность вещества земного шара равна $\rho = 5000$ кг/м³. Радиус Земли $R_3 = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 10$ м/с².

$$\text{дэффосомля вноиплгия } g' \text{ ондрипи оле } \tau \text{ П } \tau \text{ П } \cdot g' \text{ П } \approx \frac{2}{3} \rho g R = d$$

ЗАДАЧА 16. (Всеросс., 1996, ОЭ, 11) Ускорение свободного падения на поверхности планеты из несжимаемой жидкости равно $a = 9,8$ м/с². Найдите давление в центре планеты.

$$\text{вП } \tau \text{ П } \cdot g' \text{ П } \approx \frac{2}{3} \rho a R = d$$

ЗАДАЧА 17. (Всеросс., 1998, ОЭ, 9) Земля из-за вращения вокруг своей оси сплюснута со стороны полюсов. Поэтому расстояние от центра Земли до полюсов (полярный радиус) меньше расстояния от центра Земли до экватора (экваториальный радиус). Оцените отношение разности экваториального и полярного радиусов к среднему радиусу Земли $R = 6370$ км. Землю считать жидким телом, окружённым тонкой эластичной оболочкой в виде земной коры.

$$\varepsilon - \text{П } \tau \text{ П } \cdot g' \text{ П } \approx \frac{2}{3} \frac{J}{R^2} = \frac{J}{\Delta R}$$

В далеком созвездии Тау Кита...
Живут, между прочим, по-разному
Товарищи наши по разуму...

В. Высоцкий

ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 1996, ОЭ, 9) Планета Косатка из созвездия Тау Кита имеет тот же размер, что и Земля, и состоит из несжимаемой жидкой субстанции, плотность которой $\rho = 800$ кг/м³. Продолжительность суток на этой планете составляет 10 ч. Северный полюс Косатки направлен на Землю. Однажды ночью обитатель планеты Кит Вэйл всплыл на поверхность планеты в северном полушарии на широте $\alpha = 56^\circ$, чтобы полюбоваться звёздным небом. Найдите угол между горизонтом в точке, где всплыл Вэйл, и направлением на Землю (её средняя плотность $\rho_0 = 5500$ кг/м³, радиус $R = 6400$ км). Во всем созвездии Тау Кита *широтой точки* называется угол между радиусом, проведённым к ней из центра планеты, и плоскостью экватора.

$$\alpha \approx \arcsin \left(\frac{2}{3} \frac{J}{\rho_0 R^2} - 1 \right) = \arcsin \alpha$$

ЗАДАЧА 19. (МФТИ, 1993) Тело, брошенное с поверхности Земли вертикально вверх с некоторой скоростью, упало на Землю через 3 с. Через какое время упадёт тело, брошенное вертикально вверх с той же скоростью на Луне? Радиус Земли в 3,8 раза больше радиуса Луны, а масса Земли в 81 раз больше массы Луны.

$$\tau_{\text{Л}} \approx \tau_{\text{З}} \sqrt{\frac{R_{\text{З}}}{R_{\text{Л}}}} = \tau_{\text{Л}}$$

Задача 20. (МФТИ, 1993) Во сколько раз отличаются минимальные периоды обращения спутников для Марса и Земли? Масса Марса составляет $\alpha = 0,11$ массы Земли, а радиус Марса — $\beta = 0,53$ радиуса Земли.

$$9T^2 \approx \frac{v}{g} \wedge g = \frac{GM}{R^2}$$

Задача 21. (МФТИ, 1995) Луна движется вокруг Земли с периодом $T = 27,3$ суток по орбите, которую можно считать круговой. Радиус Земли $r = 6400$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9,8$ м/с². Определить по этим данным расстояние между Землёй и Луной.

$$GM \cdot g \approx \frac{r^2 \omega^2}{R^2} \wedge \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Задача 22. (МФТИ, 1995) Спутник Фобос обращается вокруг Марса по орбите радиуса $R = 9400$ км с периодом $T = 7$ ч 39 мин. Радиус Марса $R_0 = 3400$ км. Найти по этим данным ускорение свободного падения на поверхности Марса.

$$GM \cdot g \approx \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \frac{v^2}{R} = g$$

Задача 23. (МФТИ, 1993) При какой продолжительности суток на Земле камень, лежащий на широте $\varphi = 60^\circ$, оторвётся от поверхности Земли? Радиус Земли $R = 6400$ км.

$$\text{мин } T \approx \frac{R \cos \varphi}{v} \wedge v \geq \sqrt{gR}$$

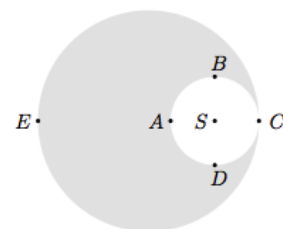
Задача 24. (МФТИ, 1993) Груз висит на нити в Москве. При какой продолжительности суток Земли нить расположилась бы параллельно оси вращения Земли? Радиус Земли $R = 6400$ км.

$$\text{мин } T \approx \frac{R}{v} \wedge v = \sqrt{gR}$$

Задача 25. (МОШ, 2006, 10) Два космических корабля с массами m_1 и m_2 летят с выключенными двигателями в поле тяготения звезды, масса которой M много больше их масс. Скорости кораблей на большом удалении от звезды были равны v_1 и v_2 соответственно. После пролёта кораблей около звезды и их удаления на большое расстояние от неё векторы их скоростей изменили своё направление на 90° и остались такими же по величине. Первый корабль пролетел от звезды на минимальном расстоянии l_1 . На каком минимальном расстоянии от звезды l_2 пролетел второй корабль?

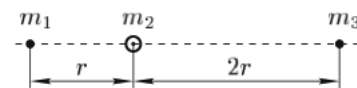
$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 l_1 = l_2$$

Задача 26. (МОШ, 2015, 11) Космонавты, высадившиеся на астероид радиусом $R = 5$ км, обнаружили внутри астероида сферическую полость радиусом $r = 2$ км. Оказалось, что в центре S полости ускорение свободного падения составляет $g_S = 0,2$ см/с². Определите плотность астероида, считая её постоянной. Изобразите на рисунке векторы ускорения свободного падения в точках A, B, C, D, E . Определите модули ускорения свободного падения в этих точках. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг².



$$g_S = \frac{GM(r)}{r^2} - \frac{GM(R-r)}{R^2} \approx \frac{GM}{R^2} \left(\frac{r^3}{R^3} - 1 \right) = g_S \Rightarrow \frac{r^3}{R^3} = 1 - \frac{g_S R^2}{GM} \Rightarrow \frac{r}{R} = \sqrt[3]{1 - \frac{g_S R^2}{GM}}$$

ЗАДАЧА 27. (Всеросс., 2009, финал, 10) В открытом космосе три небольших астероида из-за гравитационного притяжения сближаются друг с другом вдоль общей прямой, неподвижной относительно звёзд. Отношение расстояний от среднего астероида до крайних остаётся равным $n = 2$ вплоть до их столкновения (рис.). Масса левого астероида равна m_1 , масса центрального — m_2 . Найдите массу m_3 правого астероида.



$$\frac{6\Gamma}{\varepsilon u \varepsilon_9 + \Gamma u \Gamma_0 \Gamma} = \varepsilon u$$

ЗАДАЧА 28. (Всеросс., 2016, РЭ, 11) Скопления звёзд образуют бесстолкновительные системы — галактики, в которых звёзды равномерно движутся по круговым орбитам вокруг оси симметрии системы. Галактика NGC 2885 состоит из скопления звёзд в виде шара (ядра радиусом $r_{\text{я}} = 4$ кпк) и тонкого кольца, внутренний радиус которого совпадает с радиусом ядра, а внешний равен $15r_{\text{я}}$. Кольцо состоит из звёзд с пренебрежимо малой по сравнению с ядром массой. В ядре звёзды распределены равномерно.



Было установлено, что линейная скорость движения звёзд в кольце не зависит от расстояния до центра галактики: от внешнего края кольца вплоть до края ядра скорость звёзд $v_0 = 240$ км/с. Такое явление может быть объяснено наличием несветящейся массы («тёмной материи»), распределённой сферически симметрично относительно центра галактики вне её ядра.

- 1) Определите массу $M_{\text{я}}$ ядра галактики.
- 2) Определите среднюю плотность $\rho_{\text{я}}$ вещества ядра галактики.
- 3) Найдите зависимость плотности «тёмной материи» $\rho_{\text{т}}(r)$ от расстояния до центра галактики.
- 4) Вычислите отношение массы «тёмной материи», влияющей на движение звёзд в диске, к массе ядра.

Примечание: 1 кпк = 1 килопарсек = $3,086 \cdot 10^{19}$ м, гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н · м² · кг⁻².

$$\Gamma = \frac{M}{M} \left(\frac{\varepsilon u \varepsilon_9}{\Gamma_0 \Gamma} \right) = \varepsilon u \varepsilon_9 \Gamma_0 \Gamma = \frac{\varepsilon u \varepsilon_9}{\Gamma_0 \Gamma} = \varepsilon u \varepsilon_9 \Gamma_0 \Gamma = \frac{\varepsilon u \varepsilon_9}{\Gamma_0 \Gamma} = \varepsilon u \varepsilon_9 \Gamma_0 \Gamma$$