Гармоническое движение

Перед решением задач листка следует повторить статью «Механические колебания», в которой изложена вся необходимая теория.

При гармоническом движении координата тела меняется по закону синуса или косинуса. Например, если

$$x = A\sin\omega t,$$

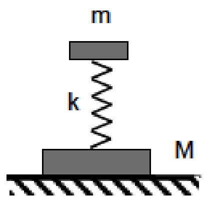
то проекция скорости

$$v_x = \dot{x} = A\omega\cos\omega t,$$

а проекция ускорения

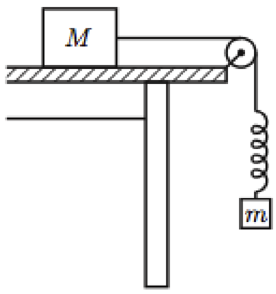
$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -A\omega^2\sin\omega t.$$

Задача 1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Два тела массами M и m соединены пружиной, как показано на рисунке. Тело m совершает гармонические колебания по вертикали с частотой ω и амплитудой A. Пружина невесома. Найдите отношение наибольшей F_1 и наименьшей F_2 сил давления системы на плоскость стола. Ускорение свободного падения равно g.



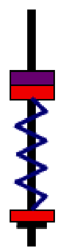
$\frac{F_1}{F_2} = \frac{(M+m)g+mA\omega^2}{(M+m)g-mA\omega^2}$ при $(M+m)g > mA\omega^2$

Задача 2. (*Всеросс., 2006, финал, 9*) Брусок массой M, покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из груза массой m и лёгкой длинной пружины, связаны лёгкой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальный неподвижный блок (см. рисунок). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола $\mu = 0{,}3$. Отношение массы бруска к массе груза $M/m = 8$. Груз совершает вертикальные колебания с периодом $T = 0{,}5$ с. Какова максимально возможная амплитуда A_{m} таких колебаний, при которых они остаются гармоническими?



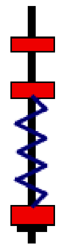
$A \leqslant \left(\frac{\mu M}{m} - 1\right)\frac{gT^2}{4\pi^2} = 8{,}8$ см, $A \leqslant \frac{gT^2}{4\pi^2} = 6{,}3$ см; таким образом, $A_{\text{m}} = 6{,}3$ см

Задача 3. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11*) На гладком вертикальном стержне надеты три шайбы, которые при скольжении по стержню остаются горизонтальными. Нижняя шайба с массой m покоится на жёстком упоре, вторая и третья — с одинаковыми массами $2m$ — покоятся вместе на невесомой длинной пружине жёсткостью k, соединяющей вторую шайбу с первой. Ось пружины совпадает с осью стержня. Верхнюю пару шайб опускают вниз так, что величина деформации пружины увеличивается в полтора раза, и отпускают, подтолкнув вниз с некоторой скоростью. При какой максимальной величине этой скорости вторая и третья шайба будут совершать гармонические колебания? Ускорение свободного падения g.



$v_0 \leqslant g\sqrt{\frac{3m}{k}}$

Задача 4. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11*) На гладком вертикальном стержне надеты три шайбы, которые при скольжении по стержню остаются горизонтальными. Нижняя шайба с массой $2m$ покоится на жёстком упоре, вторая — с массой m — покоится на невесомой длинной пружине жёсткостью k, соединяющей её с первой. Ось пружины совпадает с осью стержня. Третью шайбу, масса которой также равна m, сначала удерживают на некоторой высоте над второй, а затем аккуратно отпускают. При какой максимальной величине этой высоты вторая и третья шайба, мгновенно слипшиеся в результате неупругого соударения, будут совершать гармонические колебания? Ускорение свободного падения g.



$h \leqslant \frac{15mg}{k}$ (сила сцепления шайб велика) или $h \leqslant \frac{3mg}{k}$ (сила сцепления мала)

Задача 5. Маятник совершает гармонические колебания. В течение какой доли периода колебаний маятник удалён от положения равновесия не более чем на половину амплитуды?

1/3

Задача 6. (*МФТИ, 2006*) Висящий на упругой пружине шар совершает колебания с периодом T и амплитудой A вдоль вертикали. Масса шара намного больше массы пружины.

1) Найдите максимальную скорость (по модулю) шара v_{m}.

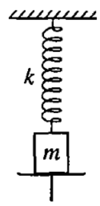
2) Найдите ускорение (по модулю) шара в те моменты времени, когда его скорость (по модулю) равна $v_{\text{m}}/3$.

1) $v_{\text{m}} = \frac{2\pi A}{T}$; 2) $a = \frac{8\sqrt{2}\pi^2 A}{3T^2}$

Задача 7. (*МФТИ, 1996*) Чашка с гирями пружинных весов покоится. На чашку поставили ещё одну гирю массой m. Найти амплитуду колебаний чашки. Жёсткость пружины k.

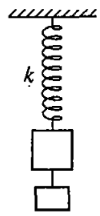
$A = \frac{mg}{k}$

Задача 8. (*МФТИ, 1996*) Пружина жёсткостью k прикреплена к потолку и бруску массой m (см. рисунок). Брусок лежит на подставке так, что ось пружины вертикальна и пружина сжата на величину L. Подставку быстро убирают. Найти амплитуду колебаний бруска.



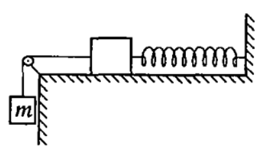
$A = L + \frac{mg}{k}$

Задача 9. (*МФТИ, 1996*) На пружине жёсткостью k висят два груза, связанные нитью (см. рисунок). После пережигания нити верхний груз стал колебаться с амплитудой A. Найти массу нижнего груза.



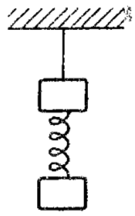
$m = \frac{kA}{g}$

Задача 10. (*МФТИ, 1996*) Груз массой m привязан нитью, перекинутой через блок, к другому грузу, который удерживается на гладком горизонтальном столе пружиной, прикреплённой к стене (см. рисунок). Нить пережигают, и груз на столе начинает колебаться с амплитудой A. Найти жёсткость пружины.



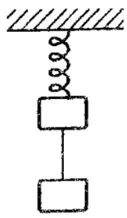
$k = \frac{mg}{A}$

Задача 11. (*МФТИ, 1992*) Два груза общей массой $m = 1$ кг, соединённые упругой пружиной жёсткостью $k = 100$ Н/м, висят на нити (см. рисунок). Найти все возможные расстояния, на которые следует оттянуть вертикально вниз и затем отпустить нижний груз, чтобы при последующих его колебаниях верхний груз оставался неподвижным.



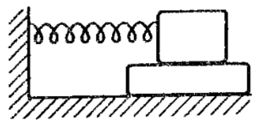
$A \leqslant \frac{mg}{k} \approx 10$ см

Задача 12. (*МФТИ, 1992*) Два груза общей массой $m = 1$ кг, связанные нитью, висят на упругой пружине жёсткостью $k = 100$ Н/м (см. рисунок). Найти все возможные расстояния, на которые следует оттянуть вертикально вниз грузы и затем отпустить их, чтобы при последующих колебаниях грузов нить не провисала.



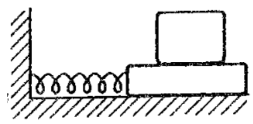
$A \leqslant \frac{mg}{k} \approx 10$ см

Задача 13. (*МФТИ, 1992*) Доска с лежащим на ней бруском находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Брусок в пять раз тяжелее доски. Система совершает колебания с амплитудой $A = 8$ см и периодом $T = 0{,}8$ с по поверхности стола под действием пружины, прикреплённой к бруску. Доска и брусок при колебаниях неподвижны относительно друг друга. При каких значениях коэффициента трения между доской и бруском такие колебания возможны?



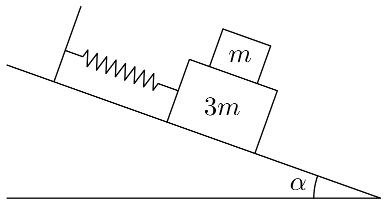
$\mu \geqslant \frac{4\pi^2 A}{gT^2}\frac{m}{M} \approx 0{,}1$

Задача 14. (*МФТИ, 1992*) Доска с лежащим на ней бруском находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Система совершает колебания под действием упругой пружины вдоль прямой с периодом $T = 1$ и максимальным значением скорости $v = 0{,}5$ м/с. При этом доска и брусок неподвижны относительно друг друга. При каких значениях коэффициента трения скольжения между доской и бруском такие колебания возможны?



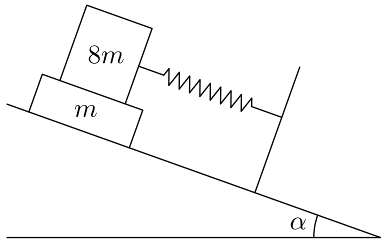
$\mu \geqslant \frac{2\pi}{T}\frac{v}{g} \approx 0{,}3$

Задача 15. (*МФТИ, 2005*) На гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α колеблются с амплитудой A как одно целое вдоль прямой шайба массой m и брусок массой $3m$ под действием пружины жёсткостью k, прикреплённой к бруску (см. рисунок). При каком минимальном коэффициенте трения скольжения между шайбой и бруском такие колебания возможны?



$\mu_{\min} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{kA}{4mg\cos\alpha}$

Задача 16. (*МФТИ, 2005*) Доска массой m и брусок массой $8m$ колеблются вдоль прямой как одно целое на гладкой наклонной поверхности с углом наклона к горизонту α под действием пружины жёсткостью k, прикреплённой к бруску (см. рисунок). Коэффициент трения скольжения между бруском и доской равен μ. При какой максимальной амплитуде колебаний такие колебания возможны?



$A_{\max} = \frac{9mg}{k}(8\mu \cos\alpha - \sin\alpha)$

Задача 17. (*МФТИ, 2007*) Брусок массой m колеблется с амплитудой A_0 вдоль прямой на гладкой горизонтальной поверхности стола под действием упругой пружины. В тот момент, когда смещение бруска от положения равновесия было $2A_0/3$, на него упал и прилип кусок пластилина массой $2m$, двигавшийся перед ударом вертикально. Время соударения значительно меньше периода колебаний, и при соударении брусок не отрывается от стола.

1) Как и во сколько раз изменился период колебаний?

2) Найдите амплитуду колебаний бруска после прилипания пластилина.

1) $\frac{T}{T_0} = \sqrt{3}$; 2) $A = \sqrt{\frac{17}{27}} A_0$

Задача 18. (*МФТИ, 2003*) Груз уравновешен на чашке пружинных весов, при этом в сжатой пружине запасена потенциальная энергия деформации U_0. На чашку весов поставили дополнительную гирю так, что масса нового груза стала в три раза больше первоначальной.

1) Во сколько раз величина максимального ускорения $a_{\max}$ во время возникших колебаний отличается от ускорения свободного падения g?

2) С каким по величине ускорением движется груз в момент, когда его кинетрическая энергия $T = 3U_0$?

Затуханием колебаний пренебречь.

1) $\frac{a_{\max}}{g} = \frac{2}{3}$; 2) $a = \frac{1}{3} g$

Задача 19. (*МФТИ, 2003*) Шарик висит на пружине в поле тяжести $\vec{g}$. В положении равновесия в пружине запасена энергия, равная U_0. Шарик оттягивают вниз так, что в пружине запасается энергия $U_1 = 9U_0/4$, а затем отпускают.

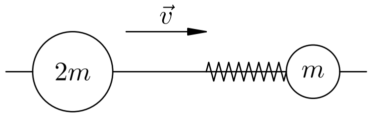
1) Чему равна величина максимального ускорения $a_{\max}$, с которым движется шарик во время возникших вертикальных колебаний?

2) Чему равна кинетическая энергия T движения шарика в момент, когда его ускорение $a = a_{\max}/2$?

Затуханием колебаний пренебречь.

1) $a_{\max} = \frac{g}{2}$; 2) $T = \frac{3}{16} U_0$

Задача 20. (*МФТИ, 2000*) Шары насажены на прямолинейную горизонтальную спицу и могут скользить по ней без трения (см. рисунок). К шару массой m прикреплена лёгкая пружина жёсткостью k, и он покоится. Шар массой $2m$ движется со скоростью v. Радиусы шаров много меньше длины пружины.

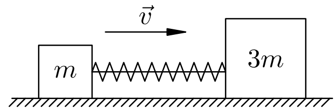


1) Определить скорость шара массой $2m$ после отрыва от пружины.

2) Определить время контакта шара массой $2m$ с пружиной.

1) $v_1 = \frac{v}{3}$; 2) $t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$

Задача 21. (*МФТИ, 2000*) По гладкой горизонтальной поверхности стола движутся с постоянной скоростью v два бруска массами m и $3m$, связанные нитью. Между брусками находится пружина жёсткостью k, сжатая на величину x_0 (см. рисунок). Пружина прикреплена только к бруску массой m. Размеры брусков малы по сравнению с длиной нити, массой пружины пренебречь, скорость брусков направлена вдоль нити. Во время движения нить обрывается, и бруски разъезжаются вдоль начального направления нити.

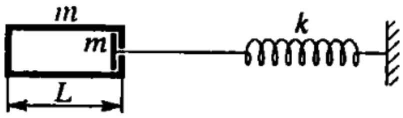


1) Найти скорость бруска массой $3m$ после его отделения от пружины.

2) Найти время соприкосновения пружины с бруском массой $3m$, считая от момента разрыва нити.

1) $v_2 = v + \frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{k}{3m}}$; 2) $t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3m}{k}}$

Задача 22. (*МФТИ, 1999*) Небольшой брусок массой m лежит на гладком столе внутри жёсткой рамы. Длина рамы равна L, масса — m. Брусок с помощью лёгкого стержня и пружины жёсткостью k соединён с неподвижной опорой (см. рисунок). Брусок отводят к противоположной стороне рамы и отпускают. В результате упругих столкновений брусок и рама совершают периодические движения.

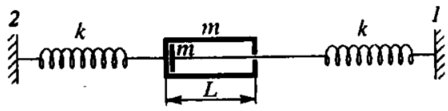


1) Найти скорость рамы сразу после первого столкновения с бруском.

2) Найти период колебаний бруска.

1) $v = L\sqrt{\frac{k}{m}}$; 2) $T = 2(\pi + 1)\sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача 23. (*МФТИ, 1999*) Небольшой брусок массой m лежит на гладком столе внутри жёсткой рамы длиной L и массой m. Брусок с помощью лёгкого стержня и пружины жёсткостью k соединён с неподвижной опорой *1* (см. рисунок). Рама пружиной жёсткостью k соединена с неподвижной опорой *2*. В начальном положении брусок касался левой стороны рамы, а пружины не были деформированы. Раму отводят налево, до соприкосновения бруска с правой стенкой рамы, и отпускают. В результате упругих столкновений брусок и рама совершают периодические движения.

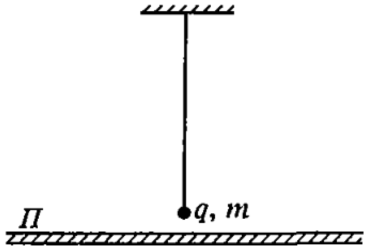


1) Найти скорость бруска сразу после первого столкновения с рамой.

2) Найти период колебаний рамы.

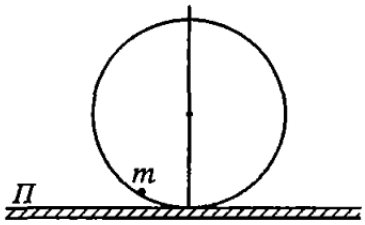
1) $v = L\sqrt{\frac{k}{m}}$; 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача 24. (*МФТИ, 1997*) Маленький шарик массой m с положительным зарядом q висит на длинной нерастяжимой нити вблизи большой непроводящей пластины *П* (см. рисунок). Определить период малых колебаний шарика, когда на пластине находится отрицательный заряд с поверхностной плотностью σ, если известно, что в отсутствие этого заряда период колебаний шарика равен T_0. Ускорение свободного падения считать заданным и равным g.



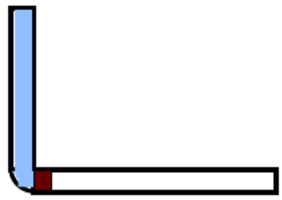
$T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1+\frac{\sigma q}{2\varepsilon_0 mg}}}$

Задача 25. (*МФТИ, 1997*) Тонкостенный цилиндр с гладкой внутренней поверхностью неподвижно лежит на горионтально расположенной непроводящей пластине *П* (см. рисунок). Размеры пластины (в горизонтальной плоскости) много больше размеров цилиндра. Известно, что отношение периода колебаний маленького отрицательно заряженного шарика внутри цилиндра при некоторой положительной плотности поверхностных зарядов σ_x пластины к периоду колебаний при $\sigma = 0$ равно $T_x/T_0 = \alpha$. определить σ_x, считая заданными отношение α, заряд шарика q, его массу m и ускорение свободного падения g.



$\sigma_x = \dfrac{2\varepsilon_0(1-\alpha^2)mg}{\alpha^2 q}$

Задача 26. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Вертикальное колено изогнутой под прямым углом гладкой трубки постоянного сечения заполнено жидкостью, которую можно считать практически идеальной. Высота этого колена равна L (и она заметно больше поперечного размера трубки), а переливание её в горизонтальное колено не допускается благодаря удерживаемой неподвижно лёгкой пробке. В некоторый момент пробку аккуратно отпускают. За какое время после этого пробка вылетит из трубки? Длина горизонтального колена равна $3L/2$, поверхностное натяжение не учитывать.

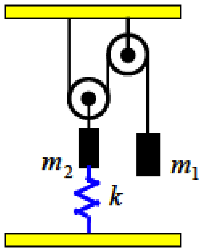


$t = \frac{\pi+1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$

Задача 27. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Длинный железнодорожный состав движется по инерции со скоростью $v_0 = 6$ м/с по горизонтальным рельсам, а затем въезжает на горку с постоянным углом наклона $\alpha = 4°$ к горизонту. Состав полностью остановился за время $T = 30$ с, не доехав до конца склона. Какая часть состава к моменту остановки оказалась на склоне горки? Трением качения и длиной переходного участка при въезде на горку пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Распределение массы по длине состава считать равномерным.

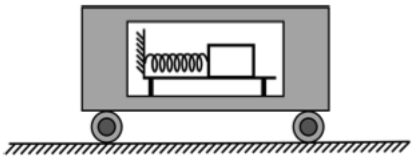
$k = \frac{\pi v_0}{2gT\sin\alpha} \approx 0{,}45$

Задача 28. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) В системе, изображённой на рисунке, массы грузов равны m_1 и m_2, жёсткость пружины k, блоки, нить и пружина — невесомые, блоки вращаются без трения, нить по блокам не скользит. В положении равновесия пружина растянута. Груз m_1 смещают из положения равновесия вниз на расстояние s, после чего грузы совершают гармонические колебания. Найдите максимальные скорости колеблющихся грузов.



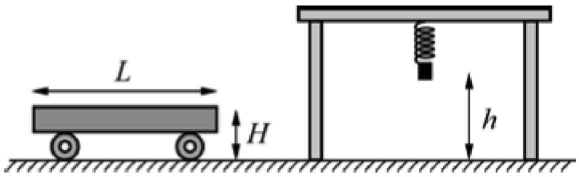
$v_1 = s\sqrt{\frac{k}{4m_1+m_2}}$, $v_2 = v_1/2$ при условии $s < \frac{(4m_1+m_2)g}{k}$ (иначе провисает нить)

Задача 29. (*МОШ, 2011, 11*) Поезд, подходящий к станции, движется равнозамедленно с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2 вплоть до момента остановки. На абсолютно гладком горизонтальном столе внутри вагона поезда находится грузик, соединённый пружиной с неподвижной опорой (см. рисунок). Пока поезд движется, грузик неподвижен относительно вагона. В момент, когда поезд останавливается, грузик приходит в движение и начинает колебаться с периодом $T = 1$ с. Найдите амплитуду колебаний грузика.



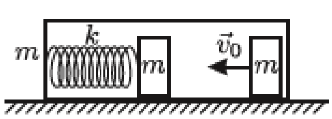
$A = \frac{aT^2}{4\pi^2} \approx 5$ мм

Задача 30. (*МОШ, 2014, 11*) Тележка высотой $H = 30$ см и длиной $L = 40$ см должна проехать под столом по горизонтальному полу, двигаясь равномерно и прямолинейно. К крышке стола снизу прикрепили лёгкую пружину жёсткостью $k = 50$ Н/м. К пружине прицепили маленький груз массой $m = 0{,}4$ кг. При недеформированной пружине груз находился на высоте $h = 42$ см над полом. Затем груз отпустили. С какой минимальной скоростью может двигаться тележка, чтобы она, проехав под столом, не задела груз?



$v_{\min} = \frac{L\sqrt{k/m}}{2\left(\pi - \arccos\frac{h-H-x_0}{x_0}\right)} = \frac{3L}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1{,}07$ м/с

Задача 31. (*МОШ, 2009, 11*) На гладком столе стоит коробка массой m (см. рисунок). В коробке находятся два бруска, масса каждого из которых также равна m. Трения в системе нет. Левый брусок соединён с коробкой лёгкой горизонтальной пружиной жёсткостью k. Правому бруску сообщили скорость v_0 в направлении левого бруска. При столкновении бруски слипаются и движутся дальше как одно целое. Найдите максимальную скорость коробки и максимальное сжатие пружины при дальнейшем движении.

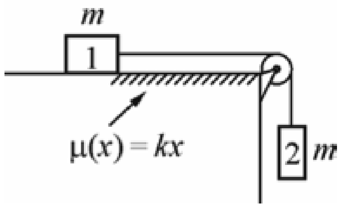


$v_{\max} = \frac{2}{3}v_0$, $x_{\max} = v_0\sqrt{\frac{m}{6k}}$

Задача 32. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11*) Однородный прямоугольный брусок скользит со скоростью v_0, направленной вдоль его более длинных сторон (длиной L), по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени он встречает границу очень обширной шероховатой области, перпендикулярную направлению его движения. За какое время после этого он остановится? Считать, что сила трения для части бруска пропорциональна площади этой части. Известно, что если скорость v_0 сообщить бруску, покоящемуся внутри шероховатой области, то он остановится за время $\tau = \frac{2L}{v_0} = 1$ с.

$t = \frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}\tau \approx 1{,}26$ с

Задача 33. (*МОШ, 2013, 11*) На длинном горизонтальном столе лежит груз 1 массой m, к которому привязана лёгкая нерастяжимая нить. Эта нить перекинута через установленный на краю стола невесомый блок, который может вращаться без трения, и ко второму концу нити прикреплён такой же груз 2. Сначала груз 1 удерживают неподвижно, так, что груз 2 свободно висит на нити, а затем груз 1 отпускают без начальной скорости. При движении системы на груз 1 действует сила сухого трения, причём коэффициент трения скольжения зависит от координаты x груза 1 по закону $\mu(x) = kx$ (координата x отсчитывается от начального положения груза 1).



1) Какой путь пройдёт груз 1 после отпускания?

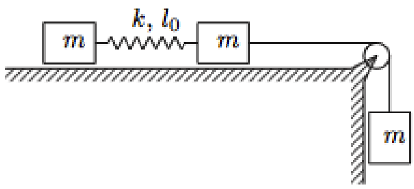
2) Какую максимальную скорость будут иметь грузы в процессе движения этой системы?

3) Найдите максимальное значение модуля силы натяжения нити в процессе движения этой системы.

4) Изобразите график зависимости проекции ускорения груза 1 на направление его движения от координаты x и график зависимости модуля силы натяжения нити от времени.

1) $s = \frac{2}{k}$; 2) $v_{\max} = \sqrt{\frac{g}{2k}}$; 3) $T_{\max} = \frac{3}{2}mg$; 4) см. конец листка

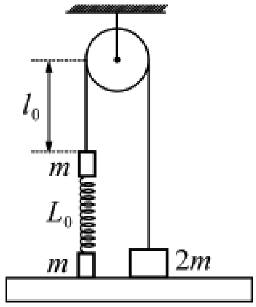
Задача 34. (*Всеросс., 2014, РЭ, 11*) Вблизи края гладкой горизонтальной полуплоскости лежат два одинаковых груза, соединённые лёгкой нерастянутой пружиной, длина которой равна l_0, а жёсткость — k. К грузу, ближайшему к краю плоскости, с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через лёгкий блок, прикреплён ещё один такой же груз массой m (см. рисунок). Его удерживают так, что участок нити, идущий от блока к этому грузу, вертикален. Нижний груз отпускают.



Через какое минимальное время τ удлинение Δl пружины станет максимальным? Найдите это удлинение.

$\tau = \pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$, $\Delta l_{\max} = \frac{2mg}{3k}$

Задача 35. (*МОШ, 2016, 11*) На рисунке изображена механическая система, в которой через невесомый блок с прикреплённой к потолку горизонтальной осью перекинута невесомая нерастяжимая нить. К концам нити прикреплены небольшие грузы массами m и $2m$. Груз $2m$ лежит на горизонтальной опоре. Груз m висит. К грузу m через невесомую идеальную пружину с жёсткостью k, расположенную вертикально и имеющую небольшую длину L_0, прикреплён второй такой же груз m. В начальный момент пружина не деформирована, и второй груз m лежит на той же опоре, что и груз $2m$. Расстояние от верхнего груза m до блока равно l_0. Свободные участки нити, не лежащие на шкиве блока, вертикальны. В момент времени $t = 0$ опора исчезает (её быстро убирают вниз). Через время τ после этого один из грузов коснулся блока. Какой это груз? При каком значении l_0 время τ максимально? Чему равно это максимальное значение τ?



Груз m; $\tau_{\max} = \pi\sqrt{\frac{3m}{4k}}$ при $l_0 = \frac{mg}{2k}$

Ответ к задаче 33