Гармоническое движение

Перед решением задач листка следует повторить статью «Механические колебания», в которой изложена вся необходимая теория.

При гармоническом движении координата тела меняется по закону синуса или косинуса. Например, если

$$x = A\sin\omega t,$$

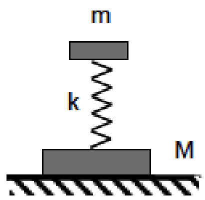
то проекция скорости

$$v_x = \dot{x} = A\omega\cos\omega t,$$

а проекция ускорения

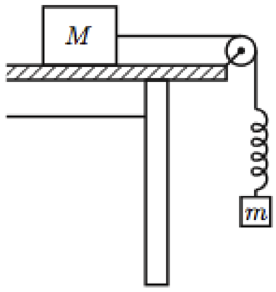
$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -A\omega^2\sin\omega t.$$

Задача 1. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) Два тела массами M и m соединены пружиной, как показано на рисунке. Тело m совершает гармонические колебания по вертикали с частотой ω и амплитудой A. Пружина невесома. Найдите отношение наибольшей F_1 и наименьшей F_2 сил давления системы на плоскость стола. Ускорение свободного падения равно g.



$\frac{F_1}{F_2} = \frac{(M+m)g+mA\omega^2}{(M+m)g-mA\omega^2}$ при $(M+m)g > mA\omega^2$

Задача 2. (*Всеросс., 2006, финал, 9*) Брусок массой M, покоящийся на горизонтальном столе, и пружинный маятник, состоящий из груза массой m и лёгкой длинной пружины, связаны лёгкой нерастяжимой нитью, перекинутой через идеальный неподвижный блок (см. рисунок). Коэффициент трения между основанием бруска и поверхностью стола $\mu = 0{,}3$. Отношение массы бруска к массе груза $M/m = 8$. Груз совершает вертикальные колебания с периодом $T = 0{,}5$ с. Какова максимально возможная амплитуда A_m таких колебаний, при которых они остаются гармоническими?



$A \leqslant \left(\frac{\mu M}{m} - 1\right)\frac{gT^2}{4\pi^2} = 8{,}8$ см, $A \leqslant \frac{gT^2}{4\pi^2} = 6{,}3$ см; таким образом, $A_m = 6{,}3$ см

Задача 3. Маятник совершает гармонические колебания. В течение какой доли периода колебаний маятник удалён от положения равновесия не более чем на половину амплитуды?

$1/3$

Задача 4. (*МФТИ, 2006*) Висящий на упругой пружине шар совершает колебания с периодом T и амплитудой A вдоль вертикали. Масса шара намного больше массы пружины.

1) Найдите максимальную скорость (по модулю) шара v_m.

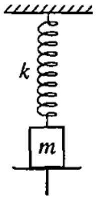
2) Найдите ускорение (по модулю) шара в те моменты времени, когда его скорость (по модулю) равна $v_m/3$.

1) $v_m = \frac{2\pi A}{T}$; 2) $a = \frac{8\sqrt{2}\pi^2 A}{3T^2}$

Задача 5. (*МФТИ, 1996*) Чашка с гирями пружинных весов покоится. На чашку поставили ещё одну гирю массой m. Найти амплитуду колебаний чашки. Жёсткость пружины k.

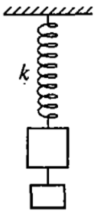
$\boxed{A = \frac{mg}{k}}$

Задача 6. (*МФТИ, 1996*) Пружина жёсткостью k прикреплена к потолку и бруску массой m (см. рисунок). Брусок лежит на подставке так, что ось пружины вертикальна и пружина сжата на величину L. Подставку быстро убирают. Найти амплитуду колебаний бруска.



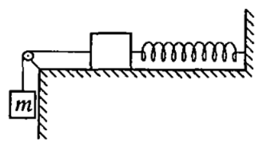
$\boxed{A = L + \frac{mg}{k}}$

Задача 7. (*МФТИ, 1996*) На пружине жёсткостью k висят два груза, связанные нитью (см. рисунок). После пережигания нити верхний груз стал колебаться с амплитудой A. Найти массу нижнего груза.



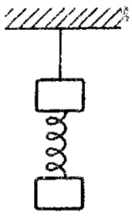
$\boxed{m = \frac{kA}{g}}$

Задача 8. (*МФТИ, 1996*) Груз массой m привязан нитью, перекинутой через блок, к другому грузу, который удерживается на гладком горизонтальном столе пружиной, прикреплённой к стене (см. рисунок). Нить пережигают, и груз на столе начинает колебаться с амплитудой A. Найти жёсткость пружины.



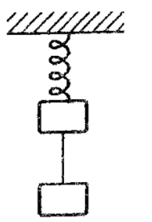
$\boxed{k = \frac{mg}{A}}$

Задача 9. (*МФТИ, 1992*) Два груза общей массой $m = 1$ кг, соединённые упругой пружиной жёсткостью $k = 100$ Н/м, висят на нити (см. рисунок). Найти все возможные расстояния, на которые следует оттянуть вертикально вниз и затем отпустить нижний груз, чтобы при последующих его колебаниях верхний груз оставался неподвижным.



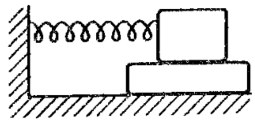
$\boxed{A \leqslant \frac{mg}{k} \approx 10 \text{ см}}$

Задача 10. (*МФТИ, 1992*) Два груза общей массой $m = 1$ кг, связанные нитью, висят на упругой пружине жёсткостью $k = 100$ Н/м (см. рисунок). Найти все возможные расстояния, на которые следует оттянуть вертикально вниз грузы и затем отпустить их, чтобы при последующих колебаниях грузов нить не провисала.



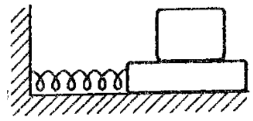
$\boxed{A \leqslant \frac{mg}{k} \approx 10 \text{ см}}$

Задача 11. (*МФТИ, 1992*) Доска с лежащим на ней бруском находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Брусок в пять раз тяжелее доски. Система совершает колебания с амплитудой $A = 8$ см и периодом $T = 0{,}8$ с по поверхности стола под действием пружины, прикреплённой к бруску. Доска и брусок при колебаниях неподвижны относительно друг друга. При каких значениях коэффициента трения между доской и бруском такие колебания возможны?



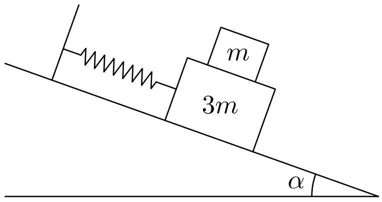
$\boxed{\mu \geqslant \frac{4\pi^2 A}{gT^2}\frac{m}{M} \approx 0{,}1}$

Задача 12. (*МФТИ, 1992*) Доска с лежащим на ней бруском находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Система совершает колебания под действием упругой пружины вдоль прямой с периодом $T = 1$ и максимальным значением скорости $v = 0{,}5$ м/с. При этом доска и брусок неподвижны относительно друг друга. При каких значениях коэффициента трения скольжения между доской и бруском такие колебания возможны?



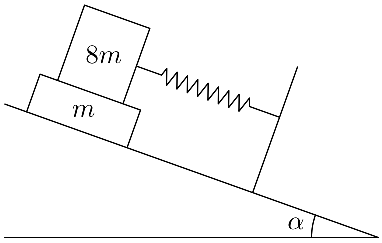
$\boxed{\mu \geqslant \frac{2\pi}{T}\frac{v}{g} \approx 0{,}3}$

Задача 13. (*МФТИ, 2005*) На гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α колеблются с амплитудой A как одно целое вдоль прямой шайба массой m и брусок массой $3m$ под действием пружины жёсткостью k, прикреплённой к бруску (см. рисунок). При каком минимальном коэффициенте трения скольжения между шайбой и бруском такие колебания возможны?



$\boxed{\mu_{\min} = \operatorname{tg}\alpha + \frac{kA}{4mg\cos\alpha}}$

Задача 14. (*МФТИ, 2005*) Доска массой m и брусок массой $8m$ колеблются вдоль прямой как одно целое на гладкой наклонной поверхности с углом наклона к горизонту α под действием пружины жёсткостью k, прикреплённой к бруску (см. рисунок). Коэффициент трения скольжения между бруском и доской равен μ. При какой максимальной амплитуде колебаний такие колебания возможны?



$\boxed{A_{\max} = \frac{9mg}{k}(8\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}$

Задача 15. (*МФТИ, 2007*) Брусок массой m колеблется с амплитудой A_0 вдоль прямой на гладкой горизонтальной поверхности стола под действием упругой пружины. В тот момент, когда смещение бруска от положения равновесия было $2A_0/3$, на него упал и прилип кусок пластилина массой $2m$, двигавшийся перед ударом вертикально. Время соударения значительно меньше периода колебаний, и при соударении брусок не отрывается от стола.

1) Как и во сколько раз изменился период колебаний?

2) Найдите амплитуду колебаний бруска после прилипания пластилина.

$\boxed{1)\ \frac{T}{T_0} = \sqrt{3};\ 2)\ A = \sqrt{\frac{17}{27}}A_0}$

Задача 16. (*МФТИ, 2003*) Груз уравновешен на чашке пружинных весов, при этом в сжатой пружине запасена потенциальная энергия деформации U_0. На чашку весов поставили дополнительную гирю так, что масса нового груза стала в три раза больше первоначальной.

1) Во сколько раз величина максимального ускорения $a_{\max}$ во время возникших колебаний отличается от ускорения свободного падения g?

2) С каким по величине ускорением движется груз в момент, когда его кинетическая энергия $T = 3U_0$?

Затуханием колебаний пренебречь.

$\boxed{1)\ \frac{a_{\max}}{g} = \frac{2}{3};\ 2)\ a = \frac{1}{3}g}$

Задача 17. (*МФТИ, 2003*) Шарик висит на пружине в поле тяжести $\vec{g}$. В положении равновесия в пружине запасена энергия, равная U_0. Шарик оттягивают вниз так, что в пружине запасается энергия $U_1 = 9U_0/4$, а затем отпускают.

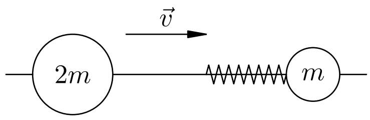
1) Чему равна величина максимального ускорения $a_{\max}$, с которым движется шарик во время возникших вертикальных колебаний?

2) Чему равна кинетическая энергия T движения шарика в момент, когда его ускорение $a = a_{\max}/2$?

Затуханием колебаний пренебречь.

1) $a_{\max} = \frac{g}{2}$; 2) $T = \frac{3}{16}U_0$

Задача 18. (*МФТИ, 2000*) Шары насажены на прямолинейную горизонтальную спицу и могут скользить по ней без трения (см. рисунок). К шару массой m прикреплена лёгкая пружина жёсткостью k, и он покоится. Шар массой $2m$ движется со скоростью v. Радиусы шаров много меньше длины пружины.

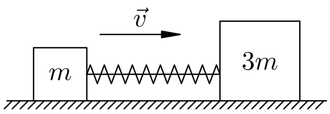


1) Определить скорость шара массой $2m$ после отрыва от пружины.

2) Определить время контакта шара массой $2m$ с пружиной.

1) $v_1 = \frac{v}{3}$; 2) $t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$

Задача 19. (*МФТИ, 2000*) По гладкой горизонтальной поверхности стола движутся с постоянной скоростью v два бруска массами m и $3m$, связанные нитью. Между брусками находится пружина жёсткостью k, сжатая на величину x_0 (см. рисунок). Пружина прикреплена только к бруску массой m. Размеры брусков малы по сравнению с длиной нити, массой пружины пренебречь, скорость брусков направлена вдоль нити. Во время движения нить обрывается, и бруски разъезжаются вдоль начального направления нити.

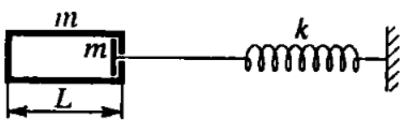


1) Найти скорость бруска массой $3m$ после его отделения от пружины.

2) Найти время соприкосновения пружины с бруском массой $3m$, считая от момента разрыва нити.

1) $v_2 = v + \frac{x_0}{2}\sqrt{\frac{k}{3m}}$; 2) $t = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{3m}{k}}$

Задача 20. (*МФТИ, 1999*) Небольшой брусок массой m лежит на гладком столе внутри жёсткой рамы. Длина рамы равна L, масса — m. Брусок с помощью лёгкого стержня и пружины жёсткостью k соединён с неподвижной опорой (см. рисунок). Брусок отводят к противоположной стороне рамы и отпускают. В результате упругих столкновений брусок и рама совершают периодические движения.

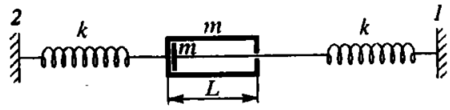


1) Найти скорость рамы сразу после первого столкновения с бруском.

2) Найти период колебаний бруска.

1) $v = L\sqrt{\frac{k}{m}}$; 2) $T = 2(\pi + 1)\sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача 21. (*МФТИ, 1999*) Небольшой брусок массой m лежит на гладком столе внутри жёсткой рамы длиной L и массой m. Брусок с помощью лёгкого стержня и пружины жёсткостью k соединён с неподвижной опорой *1* (см. рисунок). Рама пружиной жёсткостью k соединена с неподвижной опорой *2*. В начальном положении брусок касался левой стороны рамы, а пружины не были деформированы. Раму отводят налево, до соприкосновения бруска с правой стенкой рамы, и отпускают. В результате упругих столкновений брусок и рама совершают периодические движения.

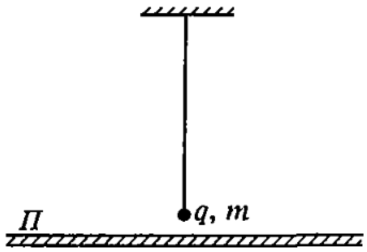


1) Найти скорость бруска сразу после первого столкновения с рамой.

2) Найти период колебаний рамы.

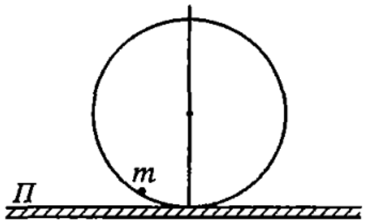
$1)\ v = L\sqrt{\frac{k}{m}};\ 2)\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Задача 22. (*МФТИ, 1997*) Маленький шарик массой m с положительным зарядом q висит на длинной нерастяжимой нити вблизи большой непроводящей пластины *П* (см. рисунок). Определить период малых колебаний шарика, когда на пластине находится отрицательный заряд с поверхностной плотностью σ, если известно, что в отсутствие этого заряда период колебаний шарика равен T_0. Ускорение свободного падения считать заданным и равным g.



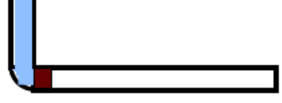
$T = \frac{T_0}{\sqrt{1+\frac{\sigma q}{2\varepsilon_0 mg}}}$

Задача 23. (*МФТИ, 1997*) Тонкостенный цилиндр с гладкой внутренней поверхностью неподвижно лежит на горионтально расположенной непроводящей пластине *П* (см. рисунок). Размеры пластины (в горизонтальной плоскости) много больше размеров цилиндра. Известно, что отношение периода колебаний маленького отрицательно заряженного шарика внутри цилиндра при некоторой положительной плотности поверхностных зарядов σ_x пластины к периоду колебаний при $\sigma = 0$ равно $T_x/T_0 = \alpha$. определить σ_x, считая заданными отношение α, заряд шарика q, его массу m и ускорение свободного падения g.



$\sigma_x = \frac{2\varepsilon_0(1-\alpha^2)mg}{\alpha^2 q}$

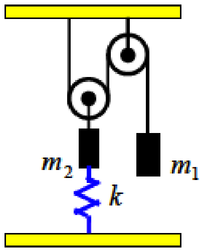
Задача 24. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Вертикальное колено изогнутой под прямым углом гладкой трубки постоянного сечения заполнено жидкостью, которую можно считать практически идеальной. Высота этого колена равна L (и она заметно больше поперечного размера трубки), а переливание её в горизонтальное колено не допускается благодаря удерживаемой неподвижно лёгкой пробке. В некоторый момент пробку аккуратно отпускают. За какое время после этого пробка вылетит из трубки? Длина горизонтального колена равна $3L/2$, поверхностное натяжение не учитывать.



$t = \frac{\pi+1}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$

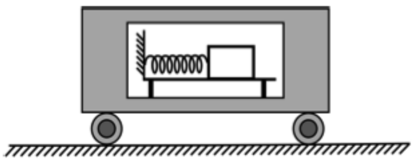
Задача 25. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11*) Длинный железнодорожный состав движется по инерции со скоростью $v_0 = 6$ м/с по горизонтальным рельсам, а затем въезжает на горку с постоянным углом наклона $\alpha = 4^\circ$ к горизонту. Состав полностью остановился за время $T = 30$ с, не доехав до конца склона. Какая часть состава к моменту остановки оказалась на склоне горки? Трением качения и длиной переходного участка при въезде на горку пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2. Распределение массы по длине состава считать равномерным.

$k = \frac{\pi v_0}{2gT\sin\alpha} \approx 0{,}45$



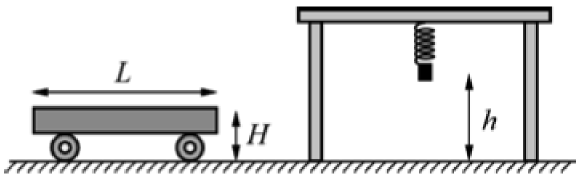
Задача 26. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) В системе, изображённой на рисунке, массы грузов равны m_1 и m_2, жёсткость пружины k, блоки, нить и пружина — невесомые, блоки вращаются без трения, нить по блокам не скользит. В положении равновесия пружина растянута. Груз m_1 смещают из положения равновесия вниз на расстояние s, после чего грузы совершают гармонические колебания. Найдите максимальные скорости колеблющихся грузов.

$v_1 = s\sqrt{\frac{k}{4m_1+m_2}}$, $v_2 = v_1/2$ при условии $s < \frac{(4m_1+m_2)g}{k}$ (иначе провисает нить)



Задача 27. (*МФО, 2011, 11*) Поезд, подходящий к станции, движется равнозамедленно с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2 вплоть до момента остановки. На абсолютно гладком горизонтальном столе внутри вагона поезда находится грузик, соединённый пружиной с неподвижной опорой (см. рисунок). Пока поезд движется, грузик неподвижен относительно вагона. В момент, когда поезд останавливается, грузик приходит в движение и начинает колебаться с периодом $T = 1$ с. Найдите амплитуду колебаний грузика.

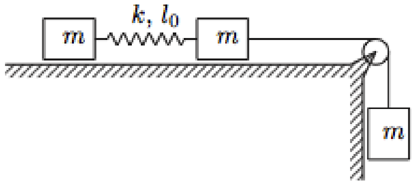
$A = \frac{aT^2}{4\pi^2} \approx 5$ мм



Задача 28. (*МФО, 2014, 11*) Тележка высотой $H = 30$ см и длиной $L = 40$ см должна проехать под столом по горизонтальному полу, двигаясь равномерно и прямолинейно. К крышке стола снизу прикрепили лёгкую пружину жёсткостью $k = 50$ Н/м. К пружине прицепили маленький груз массой $m = 0{,}4$ кг. При недеформированной пружине груз находился на высоте $h = 42$ см над полом. Затем груз отпустили. С какой минимальной скоростью может двигаться тележка, чтобы она, проехав под столом, не задела груз?

$v_{\min} = \frac{L\sqrt{k/m}}{2\left(\pi - \arccos\frac{h-H-x_0}{x_0}\right)} = \frac{3\omega L}{4\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1{,}07$ м/с

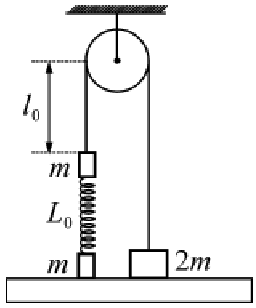
Задача 29. (*Всеросс., 2014, регион, 11*) Вблизи края гладкой горизонтальной полуплоскости лежат два одинаковых груза, соединённые лёгкой нерастянутой пружиной, длина которой равна l_0, а жёсткость — k. К грузу, ближайшему к краю плоскости, с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через лёгкий блок, прикреплён ещё один такой же груз массой m (см. рисунок). Его удерживают так, что участок нити, идущий от блока к этому грузу, вертикален. Нижний груз отпускают.



Через какое минимальное время τ удлинение Δl пружины станет максимальным? Найдите это удлинение.

$\tau = \pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}$, $\Delta l_{\max} = \frac{2mg}{3k}$

Задача 30. (*МФО, 2016, 11*) На рисунке изображена механическая система, в которой через невесомый блок с прикреплённой к потолку горизонтальной осью перекинута невесомая нерастяжимая нить. К концам нити прикреплены небольшие грузы массами m и $2m$. Груз $2m$ лежит на горизонтальной опоре. Груз m висит. К грузу m через невесомую идеальную пружину с жёсткостью k, расположенную вертикально и имеющую небольшую длину L_0, прикреплён второй такой же груз m. В начальный момент пружина не деформирована, и второй груз m лежит на той же опоре, что и груз $2m$. Расстояние от верхнего груза m до блока равно l_0. Свободные участки нити, не лежащие на шкиве блока, вертикальны. В момент времени $t = 0$ опора исчезает (её быстро убирают вниз). Через время τ после этого один из грузов коснулся блока. Какой это груз? При каком значении l_0 время τ максимально? Чему равно это максимальное значение τ?



Груз m; $\tau_{\max} = \pi\sqrt{\frac{3m}{4k}}$ при $l_0 = \frac{mg}{2k}$