

## Сила Лоренца

Опыт показывает, что если заряд  $q$  движется в магнитном поле  $B$  со скоростью  $v$ , то на заряд со стороны магнитного поля действует *сила Лоренца*

$$F = qvB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Вектор  $\vec{F}$  перпендикулярен векторам  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  и направлен туда, глядя откуда кратчайший поворот вектора  $\vec{v}$  к вектору  $\vec{B}$  виден *против часовой стрелки*.

## Векторное произведение

Векторное произведение естественным образом появляется при описании магнитного поля.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Вектор  $\vec{c}$  называется *векторным произведением* векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (обозначается  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ), если выполнены следующие условия.

1. Вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен плоскости векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и направлен в то полупространство, глядя из которого кратчайший поворот вектора  $\vec{a}$  к вектору  $\vec{b}$  виден против часовой стрелки;
2.  $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$ , где  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Обратите внимание, что векторное произведение равно нулю в том и только в том случае, если векторы коллинеарны. Приведём важнейшие свойства векторного произведения.

- Антисимметричность:  $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ .
- Ассоциативность относительно умножения на скаляр:  $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ . Поэтому можно просто писать  $\lambda \vec{a} \times \vec{b}$ .
- Дистрибутивность относительно сложения векторов:  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ .

Первые два свойства очевидны, третье — отнюдь нет (это важная теорема аналитической геометрии). Именно благодаря своей дистрибутивности операция векторного произведения служит мощным инструментом геометрии и физики.

Дополнительно почитать про векторное произведение и посмотреть симпатичные картинки можно в [английской Википедии](#).

**ЗАДАЧА 1.** Пусть  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  — единичные векторы пространственной прямоугольной декартовой системы координат  $Oxyz$ . Найдите  $\vec{i} \times \vec{j}, \vec{i} \times \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k}$ .

$$\vec{i} = \vec{j} \times \vec{k}, \vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}, \vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$$

**ЗАДАЧА 2.** Напомним, что *координатами* вектора  $\vec{a}$  в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$  называются такие числа  $a_x, a_y, a_z$ , что  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ . Выразите координаты векторного произведения  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  через координаты сомножителей.

$$xq^h v - hq^x v = zc; \quad zq^z v - xq^z v = hc; \quad hq^z v - zq^h v = xc$$

**ЗАДАЧА 3.** Убедитесь, что для силы Лоренца справедлива формула  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Выпишите координаты силы Лоренца в прямоугольной декартовой системе координат  $Oxyz$ .

## Движение заряда в магнитном поле

ЗАДАЧА 4. В однородном магнитном поле с индукцией  $B$  движется со скоростью  $v$  частица массой  $m$  и зарядом  $q$ . Направление скорости частицы перпендикулярно линиям магнитного поля. Объясните, почему траекторией заряда является окружность. Найдите радиус этой окружности (*ларморовский радиус*).

$$\frac{qB}{am} = \mathcal{R}$$

ЗАДАЧА 5. (Савченко, 10.1.3) Определите частоту обращения (*циклотронную частоту*) частицы массы  $m$  с зарядом  $q$  в магнитном поле индукции  $B$ .

$$\frac{u}{B^b} = \omega$$

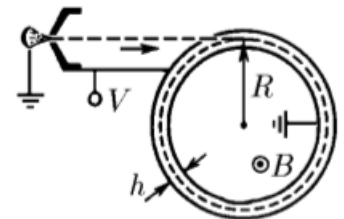
ЗАДАЧА 6. (Савченко, 10.1.14) Два электрона движутся с одинаковой по модулю скоростью  $v$  в однородном магнитном поле. В некоторый момент расстояние между ними равно  $2R$ , а скорости электронов перпендикулярны магнитному полю и прямой, соединяющей электроны. При какой индукции магнитного поля расстояние между электронами останется неизменным?

$$B = \frac{2mv^2}{4vR^2} + \frac{q}{ke} = \mathcal{B}$$

ЗАДАЧА 7. (Савченко, 10.1.15) По орбите радиуса  $R$  вокруг протона вращается электрон. Как изменится частота обращения электрона по этой же орбите, если система будет помещена в слабое магнитное поле индукции  $B$ , направленное вдоль оси вращения?

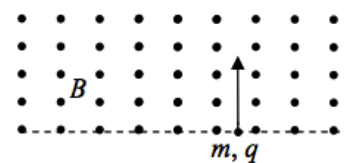
$$\frac{\omega \mathcal{B}}{e} = \omega \Delta$$

ЗАДАЧА 8. (Савченко, 10.1.16) Какое напряжение нужно приложить между обкладками цилиндрического конденсатора, чтобы он «захватил на орбиту» электроны, прошедшие ускоряющую разность потенциалов  $V$ ? Конденсатор находится в однородном магнитном поле индукции  $B$ , направленном вдоль оси конденсатора. Расстояние между обкладками  $h$  много меньше среднего радиуса конденсатора  $R$ .



$$\frac{\Lambda}{\omega e} \sqrt{2eV} - \frac{R}{v} = \Omega$$

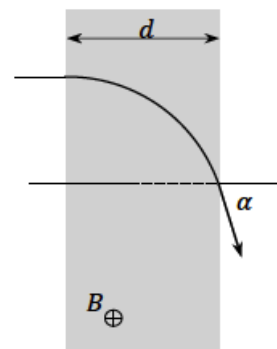
ЗАДАЧА 9. (Всеросс., 2014, ШЭ, 11) Частица массой  $m$ , несущая заряд  $q$ , влетает со скоростью  $v$  в область однородного магнитного поля с индукцией  $B$  перпендикулярно линиям индукции и плоской границе области (см. рисунок). Определите максимальное расстояние, на которое удалится от границы области частица в процессе своего движения.



$$\frac{qB}{am} = \mathcal{R}$$

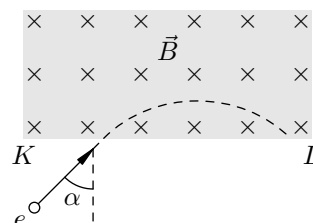
ЗАДАЧА 10. (МОШ, 2017, 11) Частица массой  $m$  и зарядом  $q$  влетает со скоростью  $v$  в область однородного магнитного поля шириной  $d$ . В результате после прохождения магнитного поля направление скорости изменяется на угол  $\alpha$ . Траектория частицы лежит в одной плоскости (см. рис.). Определите индукцию магнитного поля  $B$  и время пролёта частицы через магнитное поле.

$$\frac{v \sin \alpha}{v} = \frac{q b}{m v} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{q b}{m v}$$

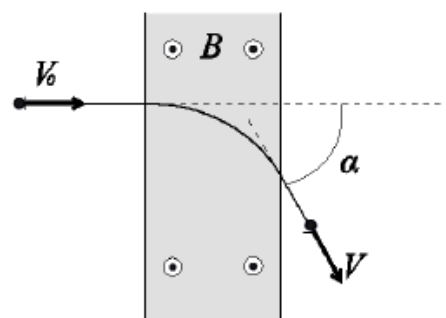


ЗАДАЧА 11. (МФТИ) Электрон со скоростью  $v = 10^9$  см/с влетает в область однородного магнитного поля с индукцией  $B = 10^{-3}$  Тл (см. рисунок). Направление скорости перпендикулярно линиям индукции поля. Определите максимальную глубину  $h$  проникновения электрона в область магнитного поля (то есть наибольшее удаление электрона от прямой  $KL$ ). Отношение заряда электрона к его массе  $\gamma = 1,76 \cdot 10^{11}$  Кл/кг, угол падения  $\alpha = 30^\circ$ .

$$m \gamma v \sin \alpha = q B h \Rightarrow h = \frac{m \gamma v \sin \alpha}{q B}$$



ЗАДАЧА 12. («Физтех», 2016, 11) Частица массой  $m = 6,6 \cdot 10^{-27}$  кг и зарядом  $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$  Кл пролетает область однородного магнитного поля с индукцией  $B = 0,03$  Тл, изменив направление своего движения на угол  $\alpha = 0,8$  рад (см. рисунок). Начальная скорость частицы перпендикулярна границе поля и силовым линиям поля.



1) Найти отношение скорости  $v$  при вылете из поля к скорости  $v_0$  при влёте в поле. Дать объяснение.

2) Найти время пролёта частицы через магнитное поле.

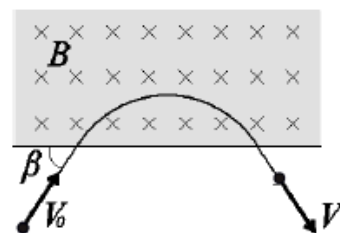
$$\frac{v}{v_0} = \cos \alpha \Rightarrow v = v_0 \cos \alpha$$

ЗАДАЧА 13. («Физтех», 2016, 11) Электрон влетает в область однородного магнитного поля и через время  $t = 0,91$  нс покидает поле (см. рисунок). Начальная скорость электрона перпендикулярна силовым линиям поля и составляет угол  $\beta = 0,4$  рад с границей поля. Масса электрона  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг, модуль его заряда  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

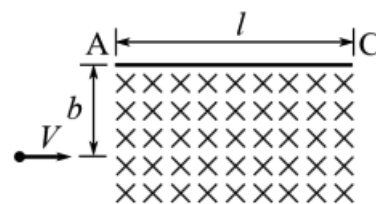
1) Найти отношение скорости  $v$  при вылете из поля к скорости  $v_0$  при влёте в поле. Дать объяснение.

2) Найти индукцию магнитного поля.

$$e v_0 \sin \beta = e B r \Rightarrow B = \frac{m v_0 \sin \beta}{e r}$$



ЗАДАЧА 14. («Физтех», 2018, 11) В область однородного магнитного поля с индукцией  $B = 1$  Тл и шириной  $l = 30\sqrt{3}$  см влетает со скоростью  $V = 1$  мм/с положительно заряженный шарик очень малого радиуса с отношением заряда к массе  $\gamma = q/m = 10^{-2}$  Кл/кг (см. рис.). Направление скорости перпендикулярно направлению магнитного поля и левой границе поля. На расстоянии  $b = 15$  см от места, где шарик влетает в область магнитного поля, параллельно его начальной скорости и вектору индукции, располагается непроводящая стена АС.

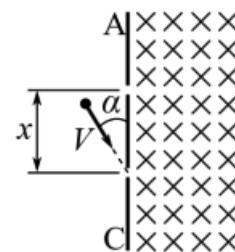


- 1) Найдите радиус кривизны траектории шарика в поле.
- 2) Найдите угол между стеной и вектором скорости шарика непосредственно перед первым ударом.
- 3) Найдите время движения шарика в поле.

Удары шарика о стену считать абсолютно упругими. Силами сопротивления и силой тяжести пренебречь. Принять  $\pi = 3,14$ .

$$1) R = \frac{qV}{\Delta} = 10 \text{ см}; 2) \beta = \frac{3}{5}; 3) t = \frac{qV}{\Delta} = 12566 \text{ с}$$

ЗАДАЧА 15. («Физтех», 2018, 11) В область однородного магнитного поля с индукцией  $B = 1$  Тл через отверстие в непроводящей стенке АС, расположенной параллельно вектору индукции магнитного поля, влетает со скоростью  $V = 1$  мм/с положительно заряженный шарик очень малого радиуса с отношением заряда к массе  $\gamma = q/m = 10^{-2}$  Кл/кг (см. рис.). Угол  $\alpha$  между вектором скорости и стенкой равен  $30^\circ$ , скорость перпендикулярна вектору индукции магнитного поля. В стенке на расстоянии  $x = 30$  см от места, где шарик влетает в область магнитного поля, сделано другое отверстие. Протяжённость поля вдоль стенки и в перпендикулярном направлении достаточно велика.



- 1) Найдите радиус кривизны траектории шарика в поле.
- 2) Найдите угол между стенкой и вектором скорости шарика непосредственно перед первым ударом.
- 3) Найдите время движения шарика в поле.

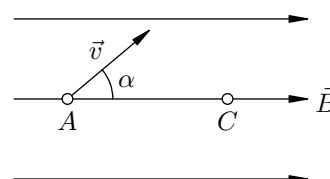
Удары шарика о стенку считать абсолютно упругими. Силами сопротивления и силой тяжести пренебречь. Принять  $\pi = 3,14$ .

$$1) R = \frac{qV}{\Delta} = 10 \text{ см}; 2) \beta = \frac{6}{5}; 3) t = \frac{qV}{\Delta} = 1570 \text{ с}$$

ЗАДАЧА 16. (Винтовая линия) В область однородного магнитного поля  $B$  влетает заряженная частица, скорость  $v$  которой направлена под острым углом  $\alpha$  к вектору магнитной индукции. Объясните, почему траекторией частицы будет винтовая линия. Найдите радиус и шаг этой винтовой линии. Масса частицы равна  $m$ , заряд равен  $q$ .

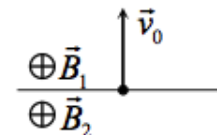
$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}, p = \frac{qB}{2\pi m v \cos \alpha}$$

ЗАДАЧА 17. (МФТИ) Электрон влетает в однородное магнитное поле. В точке А он имеет скорость  $v$ , которая составляет с направлением поля угол  $\alpha$  (см. рисунок). При какой индукции магнитного поля электрон окажется в точке С? Заряд электрона равен  $e$ , его масса равна  $m$ , расстояние  $AC = L$ .



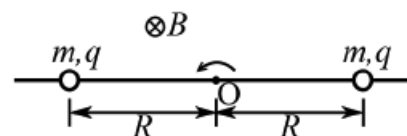
$$B = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{L e}$$

ЗАДАЧА 18. («Росатом», 2015, 11) В двух полупространствах созданы однородные магнитные поля с индукциями  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  ( $B_2 = 2B_1$ ), векторы которых параллельны. Частица с зарядом  $q$  и массой  $m$  находится на границе раздела полей и имеет скорость  $\vec{v}_0$ , направленную перпендикулярно границе раздела. Найти среднюю скорость смещения частицы вдоль границы раздела полей за большое время.



$$\frac{v_0}{2a^2} = \frac{(2B_1 + B_1)v}{(B_1 - 2B_1)2a^2} = \text{const}$$

ЗАДАЧА 19. («Физтех», 2018, 11) Две бусинки, каждая с положительным зарядом  $q$  и массой  $m$ , могут скользить без трения по жёсткому непроводящему стержню. Систему помещают в однородное магнитное поле с индукцией  $B$  и приводят во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $O$ , перпендикулярной стержню и параллельной направлению магнитного поля (см. рис.). Оказалось, что шарики находятся в равновесии (относительно стержня) на одном и том же расстоянии  $R$  от оси  $O$  при двух значениях угловой скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

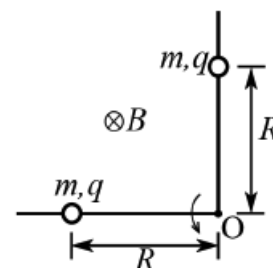


- 1) Найти заряд  $q$ , считая известными  $m, B, \omega_1$  и  $\omega_2$ .
- 2) Найти  $R$ , считая известными  $m, B, \omega_1$  и  $\omega_2$ .

Силой тяжести, силами сопротивления, а также магнитным полем, индуцированным бусинками, пренебречь.

$$\sqrt{\frac{4m\omega_1\omega_2}{kq_1q_2}} = B \left( 2 \frac{B}{(2\omega_1 + \omega_2)m} = b \right) \quad (1)$$

ЗАДАЧА 20. («Физтех», 2018, 11) Две бусинки, каждая с положительным зарядом  $q$  и массой  $m$ , могут скользить без трения по жёсткому непроводящему стержню, который согнут под прямым углом. Систему помещают в однородное магнитное поле с индукцией  $B$  и приводят во вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $O$ , перпендикулярной стержню и параллельной направлению магнитного поля (см. рис.). Оказалось, что шарики находятся в равновесии (относительно стержня) на одном и том же расстоянии  $R$  от оси  $O$  при двух значениях заряда  $q$ , равных  $q_1$  и  $q_2$ .

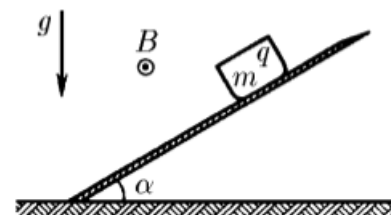


- 1) Найти  $\omega$ , считая известными  $m, R, q_1$  и  $q_2$ .
- 2) Найти  $B$ , считая известными  $m, R, q_1$  и  $q_2$ .

Силой тяжести, силами сопротивления, а также магнитным полем, индуцированным бусинками, пренебречь.

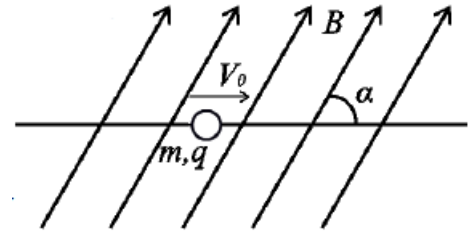
$$\sqrt{\frac{kq_1q_2}{2\sqrt{2}q_1q_2R^2}} = B \left( 2 \sqrt{\frac{kq_1q_2}{2\sqrt{2}q_1q_2}} = \omega \right) \quad (1)$$

ЗАДАЧА 21. (Савченко, 10.1.20) Определите, какую максимальную скорость разовьёт отрицательно заряженное тело, скользящее по наклонной плоскости в магнитном поле индукции  $B$  и в поле тяжести. Масса тела  $m$ , заряд по модулю равен  $q$ . Магнитное поле параллельно наклонной плоскости и перпендикулярно полю тяжести. Угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha$ . Коэффициент трения о плоскость  $\mu$ .



$$0 = a \text{ если } \mu \geq \mu_0 \text{ или } (\mu \cos \alpha - \mu_0) \frac{qBm}{mv} = a$$

ЗАДАЧА 22. («Физтех», 2016, 11) Бусинка массой  $m$  с положительным зарядом  $q$  может скользить вдоль закреплённой длинной спицы. Бусинка со спицей помещены в однородное магнитное поле с индукцией  $B$  (см. рисунок). Угол между вектором индукции и спицей равен  $\alpha = \arcsin \frac{2}{5}$ . Бусинке сообщают скорость  $v_0$ . Коэффициент трения между бусинкой и спицей равен  $\mu$ . Действие силы тяжести не учитывать.

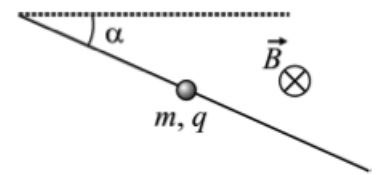


1) Найти силу трения, действующую на бусинку в момент, когда ее скорость станет  $v_0/3$ .

2) На какое расстояние сместится бусинка к моменту, когда ее скорость станет  $v_0/3$ ?

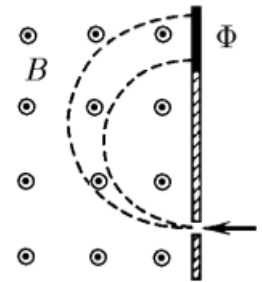
$$\frac{q b n \xi}{0 a m \xi} = s \quad ; \quad G^{0 a b n} \frac{q I}{2} = f \quad (I)$$

ЗАДАЧА 23. (МОШ, 2011, 11) Бусинка, нанизанная на неподвижный стержень, образующий угол  $\alpha$  с горизонтом (см. рисунок), имеет массу  $m$  и заряд  $q$ . Бусинка может скользить вдоль стержня с коэффициентом трения  $\mu$  и начинает движение из состояния покоя, причём  $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B$ , линии которой горизонтальны (перпендикулярны плоскости рисунка и направлены за его плоскость). Какую максимальную скорость и какое максимальное ускорение будет иметь бусинка при движении? Стержень не проводит ток. Рассмотреть два случая:  $q > 0$  и  $q < 0$ .



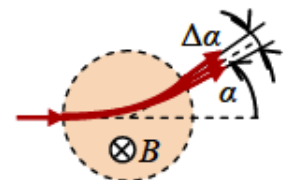
$$\left. \begin{array}{l} 0 > b \operatorname{tg} \alpha \quad ; \quad (v \cos \alpha - v \operatorname{tg} \alpha) g \\ 0 < b \operatorname{tg} \alpha \quad ; \quad v \sin \alpha \end{array} \right\} = x_{\max} \quad ; \quad \left. \begin{array}{l} 0 > b \operatorname{tg} \alpha \quad ; \quad (v \cos \alpha - v \operatorname{tg} \alpha) \frac{q |b| n}{b m} \\ 0 < b \operatorname{tg} \alpha \quad ; \quad (v \cos \alpha + v \operatorname{tg} \alpha) \frac{q |b| n}{b m} \end{array} \right\} = x_{\max} a$$

ЗАДАЧА 24. (Савченко, 10.1.9) В устройстве для определения изотопного состава ионы калия  $^{39}\text{K}^+$  и  $^{41}\text{K}^+$  сначала ускоряются в электрическом поле, а затем попадают в однородное магнитное поле индукции  $B$ , перпендикулярное направлению их движения. В процессе опыта из-за несовершенства аппаратуры ускоряющее напряжение меняется около своего среднего значения на величину  $\pm \Delta V$ . С какой относительной погрешностью  $\Delta V/V_0$  нужно поддерживать постоянным значение ускоряющего напряжения, чтобы следы пучков изотопов калия на фотопластинке  $\Phi$  не перекрывались?



$$\Delta V/V_0 = \frac{0.1}{\Delta V}$$

ЗАДАЧА 25. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Узкий пучок ионов с одинаковым зарядом, но с немного различающимися массами направляют в область цилиндрической формы, в которой создано однородное магнитное поле, направленное по оси цилиндра. Скорость ионов перпендикулярна этой оси. После прохождения области пучок отклонился от направления первоначального движения на угол  $\alpha = 30^\circ$ , и у него появилась расходимость с углом  $\Delta \alpha \approx 0,6^\circ$  (начальная расходимость была пренебрежимо мала по сравнению с этой). Найти (в процентах) разброс масс ионов пучка ( $\Delta m/m = ?$ ).



$$\frac{\Delta m}{m} \approx \frac{m}{\Delta m} \approx 2,1\%$$

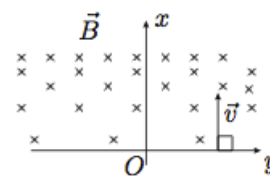
ЗАДАЧА 26. Сплошной металлический цилиндр радиусом  $R$  вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Объясните, почему в цилиндре при этом появляется электрическое поле, и найдите разность потенциалов между поверхностью цилиндра и осью вращения. При какой индукции магнитного поля, направленного вдоль оси цилиндра, электрическое поле в цилиндре не возникнет? Отношение заряда электрона к его массе равно  $\gamma$ .

$$\frac{U}{\omega} = \mathcal{E}, \quad \frac{U}{\gamma R^2 \omega} = \Omega$$

ЗАДАЧА 27. (Всеросс., 1994, ОЭ, 11) Частица с удельным зарядом  $\gamma = 10^8$  Кл/кг влетает в камеру Вильсона, находящуюся в магнитном поле с индукцией  $B = 10^{-2}$  Тл. Направление её скорости перпендикулярно линиям индукции поля. После поворота вектора скорости на  $90^\circ$  (изменение радиуса трека частицы при этом составило  $\varepsilon = 5\%$ ) поле выключают. После этого частица проходит путь  $s = 300$  мм до полной остановки. С какой скоростью влетела частица в камеру, если сила сопротивления при её движении пропорциональна скорости?

$$v_0/c \approx 10^{-4} \approx \gamma B s \lambda^{(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon})\frac{u}{c}} = 0.01$$

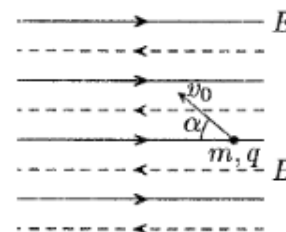
ЗАДАЧА 28. (Всеросс., 2003, финал, 11) В неоднородном магнитном поле с индукцией  $B = \alpha x$  ( $x \geq 0$ ) (рис.) стартует частица массой  $m$  и зарядом  $q$  с начальной скоростью  $v$ , направленной вдоль оси  $Ox$ . Определите максимальное смещение  $x_{\max}$  частицы вдоль оси  $x$ .



$$\frac{|b|v}{a\omega\gamma} \lambda = x_{\max}$$

### Движение заряда в параллельных полях

ЗАДАЧА 29. (МФТИ, 2002) Частица массой  $m$  с положительным зарядом  $q$  находится в однородных электрическом и магнитном полях. Напряжённость электрического поля равна  $E$ . Линии индукции магнитного поля параллельны силовым линиям электрического поля. В начальный момент частице сообщают скорость  $v_0$ , направленную под углом  $\alpha$  к линиям индукции (см. рисунок). Через некоторое время частица возвращается в начальную точку.

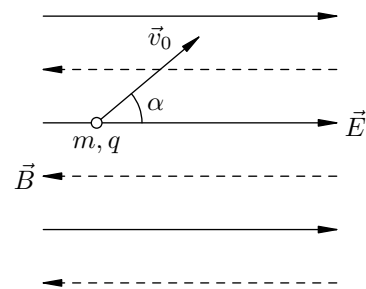


а) Чему равно это время?

б) Найти индукцию магнитного поля  $B$ , при которой возвращение в начальную точку возможно.

$$\tau = \frac{2m v_0 \cos \alpha}{q E} ; \quad B = \frac{v_0 \cos \alpha}{u} = \mathcal{E} ; \quad \dots$$

Задача 30. (МФТИ, 2002) Частица массой  $m$  с положительным зарядом  $q$  находится в однородных электрическом и магнитном полях. Линии индукции магнитного поля параллельны силовым линиям электрического поля. В начальный момент частице сообщают скорость  $v_0$ , направленную под углом  $\alpha$  к силовым линиям (см. рисунок). Через время  $\tau$  частица оказывается вновь на той же силовой линии электрического поля, с которой она стартовала, на расстоянии  $L$  от первоначальной точки.



- а) Чему равна напряжённость электрического поля  $E$ ?
- б) Найти индукцию магнитного поля  $B$ .

$$\text{а) } E = \frac{2m v_0 \sin \alpha}{q \tau} \quad \text{б) } B = \frac{2m v_0 \cos \alpha}{q \tau} \quad \text{в) } L = \frac{2m v_0^2 \sin^2 \alpha}{q E}$$

Задача 31. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Силовые линии однородного электрического поля с напряжённостью  $E = 25$  В/м параллельны линиям индукции однородного магнитного поля с индукцией  $B = 0,06$  Тл.  $\alpha$ -частица влетает в эти поля под углом  $\beta = 60^\circ$  к силовым линиям с начальной скоростью  $v_0 = 25$  км/с. Найти отношение величины шага  $n$ -го витка винтовой линии, по которой движется частица, к радиусу этого витка. Считать, что масса  $\alpha$ -частицы  $m_\alpha = 4m_p$ , заряд  $q_\alpha = 2e$ ,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд электрона,  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг — масса протона.

$$\frac{n}{r} = \frac{2\pi q_\alpha v_0 \sin \beta}{E} + \frac{2\pi q_\alpha v_0 \cos \beta}{B} \approx 0,26 + 3,25 \approx 3,51$$

Задача 32. («Физтех», 2016, 11) Шарик массой  $m$  с зарядом  $q$  брошен с поверхности Земли со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. В области, где движется шарик, наряду с гравитационным полем создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Через некоторое время шарик возвращается в точку старта. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

- 1) Найти продолжительность полёта.
- 2) Найти возможные величины индукции магнитного поля.

$$\text{1) } t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \quad \text{2) } B = \frac{m v_0 \sin \alpha}{q r} \quad \text{в) } n \in \mathbb{N}$$

Задача 33. («Физтех», 2016, 11) Шарик массой  $m$  с зарядом  $q$  брошен с поверхности Земли со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. В области, где движется шарик, наряду с гравитационным полем создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Через время  $\tau$  шарик оказался на некоторой высоте и на одной вертикали с точкой старта. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

- 1) На какой высоте оказался шарик через время  $\tau$ ?
- 2) Найти возможные величины индукции магнитного поля.

$$\text{1) } h = v_0 \sin \alpha \cdot \tau - \frac{g \tau^2}{2} \quad \text{2) } B = \frac{m v_0 \sin \alpha}{q r} \quad \text{в) } n \in \mathbb{N}$$

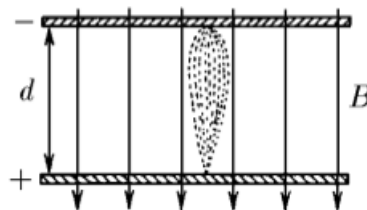


ЗАДАЧА 34. («Физтех», 2016, 11) Шарик массой  $m$  с зарядом  $q$  брошен с поверхности Земли со скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту. В области, где движется шарик, наряду с гравитационным полем создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Через некоторое время шарик достигает максимальной высоты подъёма, оказавшись на одной вертикали с точкой старта. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

- 1) Через какое время шарик достиг максимальной высоты подъёма?
- 2) Найти возможные величины индукции магнитного поля.

$$v_0 \sin \alpha = \frac{q B v_0 \cos \alpha}{m g} \Rightarrow B = \frac{m g \tan \alpha}{q}$$

ЗАДАЧА 35. (Савченко, 10.1.19) Пластины плоского конденсатора с шириной зазора между ними  $d$  расположены перпендикулярно магнитному полю индукции  $B$ . Около катода расположен источник медленных электронов, вылетающих в разных направлениях к пластинам. При каком напряжении на конденсаторе электроны будут фокусироваться на аноде? Чем определяется размер пятна?



$$U = \frac{e B d}{2 m} \Rightarrow B = \frac{2 m U}{e d}$$

### Движение заряда в скрещенных полях

ЗАДАЧА 36. (МОШ, 2018, 11) Частица с зарядом  $q$  движется вдоль прямой с постоянной скоростью  $v$  в однородных скрещенных электрическом и магнитном полях с напряжённостью  $\vec{E}$  и индукцией  $\vec{B}$ , т. е. векторы полей перпендикулярны друг другу ( $\vec{E} \perp \vec{B}$ ). Найдите модуль силы вязкого трения, действующей на эту частицу.

$$F_{\text{тр}} = q v B$$

ЗАДАЧА 37. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) В области над плоской поверхностью земли, заэкранированной от действия электрических полей, создано горизонтальное магнитное поле с индукцией  $B$ . В эту область влетел электрон, двигаясь горизонтально на высоте  $h$ , и продолжил своё движение равномерно-прямолинейно. Пролетев таким образом сквозь эту область, он вылетел в соседнюю, где было только поле тяжести. На каком расстоянии по горизонтали от точки вылета электрон врежется в землю? Отношение заряда к массе у электрона и ускорение свободного падения считать известными.

$$s = \frac{2 h v}{g} \Rightarrow v = \frac{g s}{2 h}$$

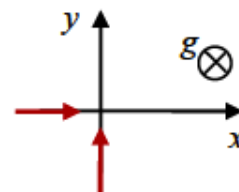
ЗАДАЧА 38. (МОШ, 2015, 11) Протон (заряд  $+e$ , масса  $m$ ) движется в электромагнитном поле по окружности радиуса  $R$ . В каждой точке траектории электрическое поле направлено к центру окружности и равно  $E$ . Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости окружности и равна  $B$ . При каких условиях на параметры задачи протон движется со скоростью, много меньшей скорости света? Какой может быть кинетическая энергия протона? Решите задачу в общем случае и получите численный ответ в двух частных случаях:

- (а)  $R = 1$  м,  $E = 1$  кВ/м,  $B = 0$ ;
- (б)  $R = 1$  м,  $E = 1$  кВ/м,  $B = 0,1$  Тл.

Ответ представьте в электронвольтах (1 эВ — энергия, получаемая протоном при прохождении разности потенциалов 1 В). Элементарный заряд составляет  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, масса протона  $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$  кг, скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с.

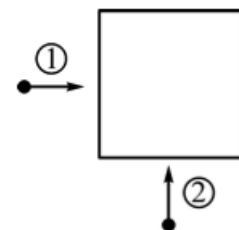
$$eER \gg mc, eEB \gg mc^2; K = \frac{1}{2} eER \left( 1 + \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} \right), \text{ где } \alpha = \frac{e^2 m}{2ER^2}, \text{ где } \alpha = v \text{ или } \alpha = \frac{v}{c} \text{ (а) } K = 0,53 \text{ эВ; (б) } K = 470 \text{ эВ или } K = 500 \text{ эВ.}$$

ЗАДАЧА 39. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Электростатическая пушка «выстреливает» наночастицы с удельным зарядом  $\beta = +5 \cdot 10^{-5}$  Кл/кг со скоростью  $v = 3500$  м/с. Выстрелы производились горизонтально в вакуумированном пространстве, в котором было создано магнитное поле, линии индукции которого также горизонтальны. Оказалось, что существуют два взаимно перпендикулярных направления, в которых наночастицы двигаются после выстрела прямолинейно. Связав с этими направлениями систему координат, найдите направление и величину индукции магнитного поля. Ускорение свободного падения принять равным  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.



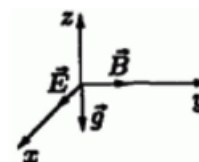
$$B = \frac{g}{\beta v} \approx 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}$$

ЗАДАЧА 40. (МОШ, 2012, 11) В некоторой области пространства созданы однородное электрическое и магнитное поля. Когда электрон влетает в эту область со скоростью  $v$  в направлении, показанном стрелкой 1, он движется в этой области прямолинейно и равномерно. Когда электрон с такой же по модулю скоростью влетает в электромагнитное поле вдоль стрелки 2, перпендикулярной направлению 1, он тоже движется в поле прямолинейно и равномерно. Определите направления векторов напряженности электрического поля  $E$  и магнитной индукции  $B$ . Найдите отношение модулей  $E/B$ .



$$E_x = E_y = 0; B_x = -B_y; E/B = v/\sqrt{2} \text{ (ось } x \text{ вдоль 1, ось } y \text{ вдоль 2)}$$

ЗАДАЧА 41. (Всеросс., 2002, финал, 10) Частица массы  $m$  с зарядом  $q$  движется с постоянной по модулю скоростью в области пространства, где имеются три взаимно перпендикулярных поля: электрическое с напряжённостью  $E$ , магнитное с индукцией  $B$  и поле тяжести  $g$  (рис.). В некоторый момент поля  $E$  и  $B$  выключают. Минимальная кинетическая энергия частицы в процессе движения составляет половину начальной. Найдите проекции скорости частицы на направления полей  $E$ ,  $B$  и  $g$  в момент выключения полей.



$$\frac{g}{E} = z_0 \cdot \left( \frac{g^b}{B^u} \right) - \left( \frac{g}{E} \right) \wedge = z_0 \cdot \frac{g^b}{B^u} = x_0$$

ЗАДАЧА 42. Частица массы  $m$  с положительным зарядом  $q$  начинает движение без начальной скорости в однородных перпендикулярных электрическом и магнитном полях.

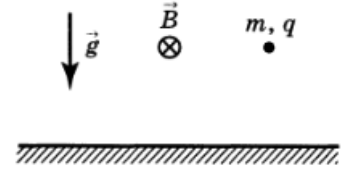
1) Направив ось  $z$  вдоль вектора  $\vec{B}$ , ось  $y$  — вдоль  $\vec{E}$  (а ось  $x$  — в дополнении до правой системы координат) и считая, что при  $t = 0$  частица находилась в начале координат, найдите зависимость координат частицы от времени.

2) Убедитесь, что траектория частицы совпадает по форме с траекторией точки обода колеса, которое катится без проскальзывания (эта кривая называется *циклоидой*).

*Примечание.* В исходных уравнениях удобно ввести обозначения  $a = \frac{qE}{m}$  и  $\omega = \frac{qB}{m}$ .

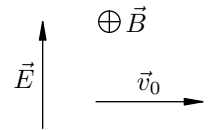
$$(q\omega \cos - 1) \frac{z''}{v} = \dot{v} \cdot (q\omega \sin - q\omega) \frac{z''}{v} = x$$

ЗАДАЧА 43. (Всеросс., 1998, ОЭ, 11) Маленький шарик массой  $m$  с зарядом  $q > 0$  начинает двигаться из состояния покоя в гравитационном и однородном магнитном полях (рис.). Индукция магнитного поля равна  $B$ , вектор  $\vec{B}$  направлен параллельно поверхности Земли, причем  $qcB \gg mg$ , где  $c$  — скорость света в вакууме. На какое расстояние и в каком направлении шарик сместится от первоначального положения через достаточно большое время  $\tau$ ? Какое время  $\tau$  можно считать достаточно большим? Шарик в течение всего времени  $\tau$  не достигает поверхности Земли.



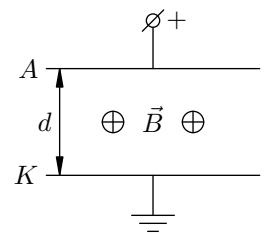
$$\frac{qb}{u} \ll 1 \text{ или } \frac{qb}{\tau B u} = \tau$$

ЗАДАЧА 44. (МФТИ, 1997) Положительно заряженная частица движется в однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях (см. рисунок). В некоторый момент времени скорость частицы перпендикулярна векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  и равна  $v_0$ . Чему будет равна скорость этой частицы в те моменты, когда вектор её скорости будет составлять  $180^\circ$  с вектором  $\vec{v}_0$ , при условии, что  $E = v_0 B$ ? Поле тяжести не учитывать.



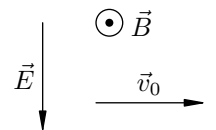
$$0 \Omega \xi$$

ЗАДАЧА 45. (МФТИ, 1997) Вакуумный плоский диод, в котором расстояние между катодом  $K$  и анодом  $A$  равно  $d$ , находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна  $B$  и направлена параллельно плоскости электродов (см. рисунок). При каком минимальном напряжении на диоде электроны с поверхности катода смогут достичь анода? Электроны у поверхности катода можно считать неподвижными, а полем тяжести пренебречь.



$$\frac{u\tau}{c^2 \tau^2 B^2} = \Omega$$

ЗАДАЧА 46. (МФТИ, 1992) Заряженная частица движется в однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях. В некоторый момент времени её скорость  $\vec{v}_0$  перпендикулярна векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  (см. рисунок). Чему будет равно отношение изменения кинетической энергии к начальной кинетической энергии частицы в те моменты, когда вектор её скорости будет перпендикулярен  $\vec{v}_0$ , если известно, что  $E/(v_0 B) = \beta \ll 1$ ?

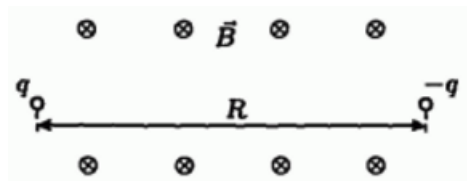


$$g\tau = {}^0 K/K \nabla$$

ЗАДАЧА 47. (МОШ, 2018, 11) Два длинных коаксиальных цилиндра расположены внутри катушки, создающей в них однородное магнитное поле с индукцией  $B$ , направленное вдоль оси системы. К цилиндрам приложено электрическое напряжение, благодаря чему между ними возникает электрическое поле напряжённостью  $E$ , направленное от внешнего цилиндра к внутреннему вдоль их радиусов. Внутренний цилиндр разогрет и испускает электроны. Начальные скорости электронов можно считать малыми. Найдите максимальное расстояние между цилиндрами, при котором ещё возможно протекание электрического тока между ними. Расстояние между цилиндрами значительно меньше их радиусов. Масса электрона  $m$ , заряд электрона  $e$ .

$$\frac{eE}{m\omega} = \text{const}$$

ЗАДАЧА 48. (Всеросс., 2004, финал, 11) Две частицы с одинаковыми массами  $m$  и зарядами  $q$  и  $-q$  начинают с нулевыми начальными скоростями двигаться в однородном магнитном поле  $\vec{B}$ , перпендикулярном соединяющему их отрезку длины  $R$  (рис.).



1) Найдите минимальное значение индукции магнитного поля  $B = B_0$  (критическое поле), при котором частицы не столкнутся друг с другом.

2) На каком расстоянии  $r$  друг от друга они окажутся при наибольшем сближении, если  $B > B_0$ ?

3) Найдите скорости частиц и расстояние между ними в момент наибольшего сближения при критическом значении магнитного поля. Как в этом случае будут двигаться частицы после их наибольшего сближения? Нарисуйте качественный график траектории частиц.

$$\frac{m\omega}{B} = a, \frac{e}{B} = \omega \left( \frac{eB}{m\omega} - 1 \right) \sqrt{1 + \frac{eB}{m\omega}} = \omega \left( \frac{eB}{m\omega} \sqrt{1 + \frac{eB}{m\omega}} - \sqrt{1 + \frac{eB}{m\omega}} \right) \quad (1)$$

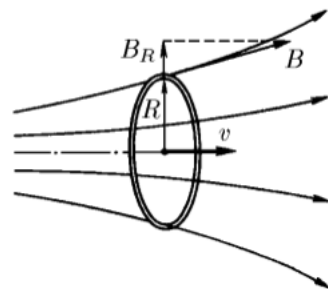
## Магнитный поток

Магнитный поток (или, что то же самое, поток вектора магнитной индукции) через некоторую поверхность, определяется точно так же, как и поток вектора напряжённости электрического поля (листок «Теорема Гаусса»):

$$\Phi = \sum_i B_{ni} \Delta S_i = \int_S B_n dS.$$

Опыт показывает, что магнитных зарядов не существует, поэтому линии магнитного поля всегда являются замкнутыми. В результате магнитный поток через любую замкнутую поверхность (ограничивающую некоторый объём) оказывается равным нулю, поскольку каждая линия магнитного поля, вошедшая в указанный объём, из него выходит, так что число входящих линий равно числу выходящих.

ЗАДАЧА 49. (Савченко, 10.1.21) Равномерно заряженное кольцо радиуса  $R$ , линейная плотность заряда которого  $\rho$ , движется соосно аксиально-симметричному магнитному полю со скоростью  $v$ . Радиальная составляющая индукции магнитного поля на расстоянии  $R$  от оси равна  $B_R$ . Определите момент сил, действующих на кольцо.



$$\frac{2\pi R^2 \rho v B_R}{\dots} = \dots$$

ЗАДАЧА 50. (Савченко, 10.1.22) Докажите, что приращение момента импульса  $\Delta L$  кольца в предыдущей задаче пропорционально приращению потока магнитной индукции через кольцо  $\Delta\Phi$ :

$$\Delta L = \frac{1}{2\pi} Q \Delta\Phi,$$

где  $Q$  — электрический заряд кольца. Для доказательства воспользуйтесь тем, что поток магнитной индукции через боковую поверхность цилиндра равен разности потоков через его торцы.

ЗАДАЧА 51. (Савченко, 10.1.23) Какую минимальную скорость нужно сообщить равномерно заряженному непроводящему кольцу, расположенному соосно аксиально-симметричному полю, вдоль оси этого поля, чтобы кольцо переместилось из области однородного магнитного поля  $B_1$  в область однородного поля  $B_2$ ,  $B_2 > B_1$ ? Радиус кольца  $R$ , заряд  $Q$ , масса  $m$ .

$$\boxed{v = \frac{2mR}{Q} \sqrt{B_2 - B_1}}$$