Сила Ампера

Если прямолинейный проводник длиной l, по которому протекает ток I, находится в однородном магнитном поле B, то на проводник со стороны поля действует *сила Ампера*

$$F = BIl\sin\alpha,$$

где α — угол между направлениями тока и поля.

Задача 1. Выведите формулу для силы Ампера, пользуясь выражением для силы Лоренца и формулой $I = envS$ (см. формулу (5) из листка «Постоянный ток»).

Задача 2. На горизонтальных рельсах, расположенных в вертикальном однородном магнитном поле B, покоится металлическая перемычка перпендикулярно рельсам. Расстояние между рельсами l, масса перемычки m, коэффициент трения между рельсами и перемычкой равен μ. Какой ток нужно пропустить через перемычку, чтобы она сдвинулась с места?

$\boxed{I = \frac{\mu mg}{Bl}}$

Задача 3. Горизонтальный проводник длиной l и массой m, подвешенный за концы на двух проводах, расположен в вертикальном однородном магнитном поле B. По проводнику течёт постоянный ток I. Найдите угол отклонения проводов от вертикали.

$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{BIl}{mg}\right)}$

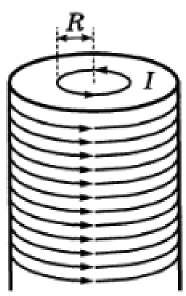
Задача 4. Жёсткое проволочное кольцо радиуса R находится в однородном магнитном поле B, перпендикулярном плоскости кольца. По кольцу течёт постоянный ток I. Найдите силу упругости, возникающую в проволоке. Магнитное взаимодействие различных участков проволоки не учитывать.

$\boxed{T = BIR}$

Задача 5. (*«Покори Воробъёвы горы!», 2017, 10–11*) Из медной проволоки с площадью сечения S сделано кольцо радиусом R, по которому течет ток I. Кольцо помещается в однородное магнитное поле так, что его ось совпадает с направлением линий магнитной индукции. Найдите максимальное значение индукции B магнитного поля, при которой кольцо не разорвется, если прочность меди на разрыв равна σ (этот параметр равен отношению силы, которая требуется для разрыва проволоки, к площади её поперечного сечения).

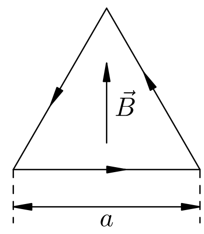
$\boxed{B_{\max} = \frac{\sigma S}{IR}}$

Задача 6. (*Всеросс., 1995, финал, 10*) Внутри длинного соленоида вдали от его торцов магнитное поле однородно и его индукция равна B. Один из торцов соленоида закрывают картонным диском, на котором соосно закрепляют небольшой круговой виток из проволоки так, что центр витка совпадает с осью соленоида (рис.). Найдите силу натяжения проволоки витка, если его радиус равен R, а сила тока протекающего по нему равна I.



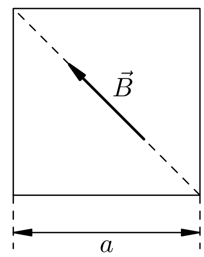
$\boxed{T = \frac{1}{2}BIR}$

Задача 7. (*МФТИ, 1999*) На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жёсткая тонкая рамка из однородного куска проволоки в виде равностороннего треугольника со стороной, равной a. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны одной из сторон рамки (см. рисунок). Масса рамки m, величина индукции B. Какой силы ток нужно пропустить по рамке (против часовой стрелки), чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?



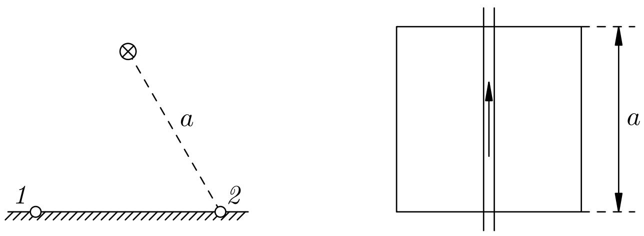
$\boxed{I = \frac{4mg}{3aB}}$

Задача 8. (*МФТИ, 1999*) На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жёсткая тонкая квадратная рамка из однородного куска проволоки со стороной, равной a. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого параллельны одной из диагоналей квадрата рамки (см. рисунок). Масса рамки m, величина индукции B. Какой силы ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин квадрата?



$\boxed{I = \frac{mg}{aB\sqrt{2}}}$

Задача 9. (*МФТИ, 1999*) На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жёсткая тонкая квадратная рамка из однородного куска проволоки со стороной, равной a. Рамка находится в магнитном поле длинного горизонтального провода с током, расположенного симметрично над рамкой (см. рисунок). Масса рамки m, индукция магнитного поля у боковых сторон рамки *1* и *2* равна B. Коэффициент трения скольжения рамки о поверхность стола равен μ ($\mu < 1/3$). Какой силы ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала скользить по столу, не отрываясь от него?



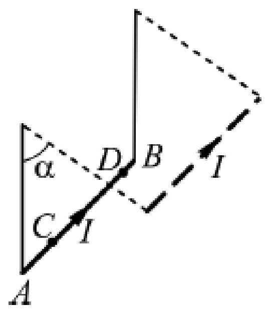
Вид сбоку *Вид сверху*

$\boxed{I \geqslant \frac{\mu mg}{aB}}$

Задача 10. (*МФТИ, 1999*) На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жёсткая тонкая квадратная рамка со стороной, равной a. Рамка находится в магнитном поле длинного горизонтального провода с током, расположенного симметрично над рамкой (см. рисунок предыдущей задачи). Масса рамки M, индукция магнитного поля у боковых сторон рамки *1* и *2* равна B. Коэффициент трения скольжения рамки о стол таков, что при некоторой величине тока, пропущенного через рамку, она начинает приподниматься (без скольжения) относительно одной из своих сторон. Найти величину этого тока.

$\boxed{I \geqslant \frac{Mg}{aB\sqrt{3}}}$

Задача 11. (*МОШ, 2010, 11*) Тяжёлый металлический стержень AB подвешен в горизонтальном положении на двух лёгких вертикальных проводах в лаборатории, где в некотором объёме создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Участок CD стержня всё время находится в магнитном поле, а провода-подвески — вне поля. В первом опыте на стержень подали напряжение, и в нём очень быстро возник ток силой I. Максимальный угол, на который подвески стержня отклонились от вертикали, был при этом равен $\alpha = 60°$. Во втором опыте силу тока через стержень плавно увеличивали от нуля до того же значения I. На какой угол β отклонились подвески во втором опыте?



$\boxed{\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2} = 30°}$

Векторное произведение

В некоторых олимпиадных задачах (в первую очередь это касается МОШ) требуется уметь обращаться с векторным произведением векторов.

Определение. Вектор $\vec{c}$ называется *векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), если выполнены следующие условия.

1. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен в то полупространство, глядя из которого кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден против часовой стрелки;

2. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Обратите внимание, что векторное произведение равно нулю в том и только в том случае, если векторы коллинеарны. Приведём важнейшие свойства векторного произведения.

- Антикоммутативность: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$.

- Ассоциативность относительно умножения на скаляр: $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$. Поэтому можно просто писать $\lambda\vec{a} \times \vec{b}$.

- Дистрибутивность относительно сложения векторов: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Первые два свойства очевидны, третье — не совсем (это хорошая теорема). Именно благодаря своей дистрибутивности операция векторного произведения служит мощным инструментом геометрии и физики.

Дополнительно почитать про векторное произведение и посмотреть симпатичные картинки можно в английской Википедии.

Задача 12. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы пространственной прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$. Найдите $\vec{i} \times \vec{j}$, $\vec{i} \times \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k}$.

$\boxed{\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k};\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j};\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}}$

Задача 13. Напомним, что *координатами* вектора $\vec{a}$ в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ называются такие числа a_x, a_y, a_z, что $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. Выразите координаты векторного произведения $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ через координаты сомножителей.

$\boxed{c_x = a_y b_z - a_z b_y;\ c_y = a_z b_x - a_x b_z;\ c_z = a_x b_y - a_y b_x}$

Задача 14. Убедитесь, что для силы Лоренца справедлива формула $\vec{F}_{\text{Л}} = q\vec{v} \times \vec{B}$, а для силы Ампера (действующей на прямолинейный проводник с током в однородном магнитном поле) — формула $\vec{F}_{\text{А}} = \vec{I} \times \vec{B}l$.

Задача 15. 1) По криволинейному проводнику, расположенному в магнитном поле $\vec{B}$, протекает ток I. Объясните формулу

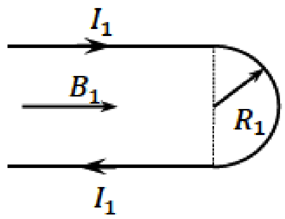
$$\vec{F}_{\text{А}} = I \int\limits_{l} d\vec{l} \times \vec{B}.$$

2) Пусть дополнительно известно, что магнитное поле однородно. Покажите, что в этом случае

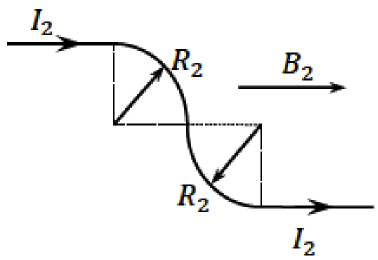
$$\vec{F}_{\text{А}} = I\vec{l} \times \vec{B},$$

где вектор $\vec{l}$ соединяет начало и конец проводника.

Задача 16. (*МОШ, 2016, 11*) А) Проводник с током I_1, состоящий из двух параллельных участков, соединённых проволочной полуокружностью радиусом R_1, помещён в однородное магнитное поле индукцией B_1, направленное вдоль параллельных участков провода (верхний рисунок). Определите модуль силы, с которой магнитное поле действует на этот провод с током.

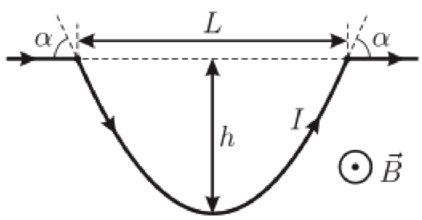


Б) Решите задачу в случае, когда провод состоит из двух параллельных участков, которые соединены двумя проволочными четвертями окружностей радиусом $R_2 = 10$ см, как показано на нижнем рисунке. Ток в проводе $I_2 = 30$ А, вектор индукции однородного магнитного поля $B_2 = 1$ Тл направлен вдоль параллельных участков провода.



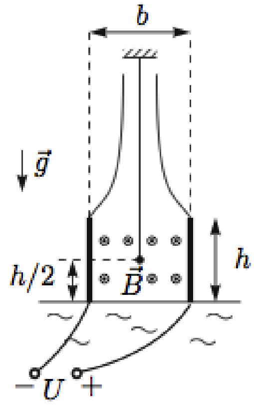
А) $F_1 = 2B_1I_1R_1$; Б) $F_2 = 2B_2I_2R_2 = 6$ Н

Задача 17. (*МОШ, 2008, 11*) Участок гибкого провода массой m подвешен так, что его концы закреплены на одинаковой высоте (см. рисунок). Провод находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией B, и по нему течёт ток I. Силы, действующие на провод в точках подвеса, образуют углы α с горизонтом. Найдите силу T натяжения провода в его нижней точке. Размеры L и h известны.



$T = IBh + \frac{1}{2}(mg + IBL)\operatorname{ctg}\alpha$

Задача 18. (*Всеросс., 2016, финал, 11*) Магнитогидродинамический (МГД) насос представляет собой плоский конденсатор с размерами пластин $h \times a$ и расстоянием между ними b ($h \gg b$, $a \gg b$). С боковых торцов конденсатор ограничен непроводящими стенками. К пластинам конденсатора подключён идеальный источник с напряжением U (полярность указана на рисунке). Между пластинами конденсатора создано однородное магнитное поле с индукцией B, вектор которой горизонтален и параллелен проводящим пластинам. Нижними краями конденсатор касается поверхности слабопроводящей жидкости с плотностью ρ_0 и удельным сопротивлением λ. Сверху к конденсатору герметично присоединён непроводящий кожух. Посередине конденсатора на высоте $h/2$ на тонкой нити подвешен небольшой непроводящий шарик, имеющий объём V и плотность $\rho > \rho_0$. Определите зависимость силы $T(U)$ натяжения нити от напряжения на источнике. Постройте качественный график этой зависимости, указав на нём характерные точки. Сверху кожух и поверхность проводящей жидкости сообщаются с атмосферой.



$$T(U) = \begin{cases} \rho g V, & \text{если } U \leqslant \rho_0 g \lambda b / B, \\ (\rho - \rho_0) g V + \frac{BV}{\lambda b} U, & \text{если } U > \rho_0 g \lambda b / B \end{cases}$$