# Движение по окружности

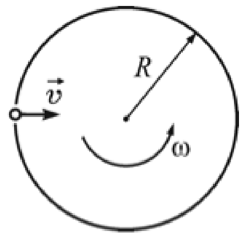
Задача 1. (*«Росатом», 2012, 8–11*) На часах 16:00. Через какое время после этого часовая и минутная стрелки часов встретятся во второй раз?

$\tau = \frac{8\pi}{3(\omega_{мин} - \omega_{час})} = 87{,}3$ мин

Задача 2. (*«Росатом», 2018, 9–10*) Минутная стрелка часов в 2 раза длиннее часовой. В некоторый момент времени стрелки совпали. Через какое время после этого конец часовой стрелки будет удаляться от конца минутной с максимальной скоростью?

$\tau = \frac{\pi}{3(\omega_{мин} - \omega_{час})} = \frac{120}{11}$ мин

Задача 3. (*«Курчатов», 2015, 9*) Маленький шарик влетает со скоростью $v$ в малое отверстие в стенке полого цилиндра, вращающегося вокруг своей оси (см. рисунок). Радиус $R$ цилиндра много больше толщины его стенок. Скорость шарика перпендикулярна оси цилиндра. Какой должна быть угловая скорость вращения цилиндра $\omega$ для того, чтобы шарик вылетел наружу, не испытав соударений? Силу тяжести не учитывайте.




$\omega = \frac{(2n+1)\pi v}{2R}$, $n \in \mathbb{Z}$

Задача 4. (*МОШ, 2011, 9*) Самолёт ТУ–160 в безветренную на всей Земле погоду стартовал с аэродрома в Санкт-Петербурге. В течение всего времени 27-часового полета самолёт находился на одной и той же высоте и держал одну и ту же по величине скорость 1000 км/час, сделав несколько дозаправок в воздухе. Сначала он 6 часов летел на юг, затем 10 часов на восток, потом 6 часов на север, и в последние 5 часов полета его скорость была направлена на запад. Сколько ещё времени потребуется самолёту, чтобы с такой же по величине скоростью долететь до родного аэродрома по кратчайшему пути? Санкт-Петербург находится на широте 60°, а радиус Земли равен примерно 6400 км.

$\approx 109{,}2$ с

Задача 5. Колесо катится по горизонтальной дороге без проскальзывания. Центр колеса движется с постоянной скоростью $v_0$. Найти мгновенную скорость произвольной точки обода колеса (в зависимости от угла $\varphi$ между радиусом этой точки и вертикалью; угол отсчитывается от верхней точки колеса).

$v = 2v_0 \cos\frac{\varphi}{2}$

Задача 6. (*«Курчатов», 2017, 9*) Диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью $v_0$ вниз по наклонной плоскости, составляющей угол 60° с горизонтом. Найдите модуль скорости верхней точки диска.

$v = v_0\sqrt{3}$

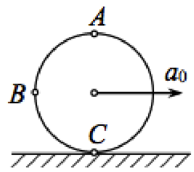
Задача 7. (*«Курчатов», 2017, 10*) Диск катится без проскальзывания с постоянной скоростью $v_0$ вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $30^\circ$ с горизонтом. Найдите модуль скорости нижней точки диска.

$v = v_0\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Задача 8. (*МОШ, 2018, 10*) Колесо, двигаясь по прямой равномерно с проскальзыванием, переместилось на расстояние 2 м, совершив при этом 5 оборотов. На каком расстоянии от центра колеса расположен мгновенный центр его вращения?

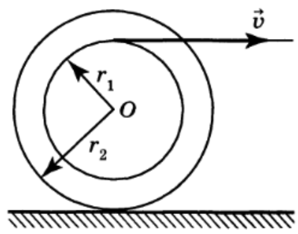
$x = \frac{s}{2\pi N} = 6{,}4$ см

Задача 9. (*МОШ, 2018, 11*) Колесо катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Ускорение центра колеса равно $a_0$. Найдите значения ускорений точек $A$ и $B$ колеса в момент времени, когда ускорение точки $C$ становится равным по модулю $a_0$.



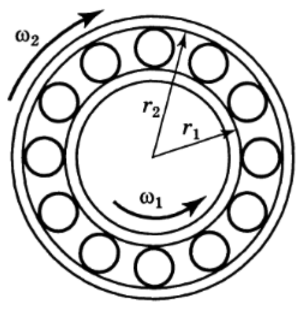

$a_A = a_B = a_0\sqrt{5}$

Задача 10. (*Всеросс., 1995, ОЭ, 9*) Катушку с нитками тянут за нитку с постоянной скоростью $v$, как показано на рисунке. Катушка катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания. Определите угловую скорость вращения катушки.



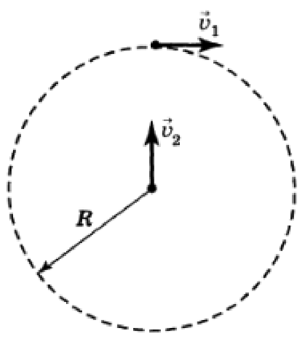

$\omega = \frac{v}{r_1+r_2}$

Задача 11. (*Всеросс., 1996, ОЭ, 9*) Внутреннее кольцо шарикоподшипника, имеющее радиус $r_1$, вращается с угловой скоростью $\omega_1$ против часовой стрелки; наружное кольцо, радиус которого равен $r_2$, вращается по часовой стрелке с угловой скоростью $\omega_2$. Сам шарикоподшипник неподвижен (рис.). Определите скорость движения центров шариков. Считайте, что шарики катятся без проскальзывания и не соприкасаются между собой.



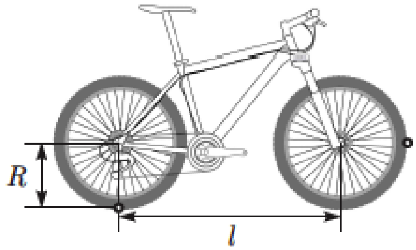

$v = \frac{1}{2}(\omega_2 r_2 - \omega_1 r_1)$

Задача 12. (*Всеросс., 1999, ОЭ, 10*) Два точечных тела начинают одновременно двигаться: первое — по окружности радиуса $R$ с постоянной по модулю скоростью $v_1$, второе — из центра той же окружности со скоростью $v_2 = \frac{4}{5}v_1$, причём вектор $\vec{v}_2$ направлен всё время на первое тело (рис.). На каком расстоянии друг от друга окажутся тела через время $t \gg 2\pi R/v_1$?




$d = \frac{5}{3}R$

Задача 13. (*Всеросс., 2016, финал, 9; «Росатом», 2018, 11*) Колёса велосипеда имеют одинаковый радиус $R$, а расстояние между центрами колёс $l = 3R$. В протекторе покрышек переднего и заднего колёс застряли два маленьких камня. В начальный момент камень на заднем колесе касается земли, а камень на переднем колесе находится в крайнем переднем положении (см. рисунок). Велосипед едет прямолинейно со скоростью $v$, колёса не скользят по дороге, камни не отрываются от покрышек.

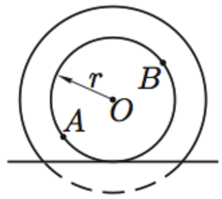



1) Найдите максимальное $L_{\max}$ и минимальное $L_{\min}$ расстояния между камнями в процессе движения велосипеда.

2) Через какое минимальное время $t$ после начала движения расстояние между камнями достигает максимального значения?

1) $L_{\max} = R\left(3+\sqrt{2}\right)$, $L_{\min} = R\left(3-\sqrt{2}\right)$; 2) $t = \frac{\pi R}{4v}$

Задача 14. (*Всеросс., 2008, финал, 10*) По рельсам катится с постоянной скоростью вагонетка. Радиус её колеса равен $r$, а радиус реборды (бортика, выступающего за обод колеса и предохраняющего колесо от схода с рельса) существенно больше. В некоторый момент времени скорости двух диаметрально противоположных точек $A$ и $B$ обода равны по модулю $v_A$ и $v_B$ соответственно (рис.).



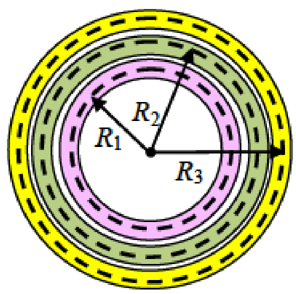

1) С какой скоростью $v_0$ катится колесо?

2) В тот же момент времени скорость некоторой точки $C$, находящейся на реборде, направлена вертикально и равна $v_C$. Однозначно ли определяется положение этой точки?

3) Чему равна проекция ускорения $a_{Cy}$ этой точки на вертикальную координатную ось?

1) $v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{v_A^2+v_B^2}$; 2) таких точек две; 3) $a_{Cy} = \frac{v_A^2+v_B^2}{4r}$

Задача 15. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 7–9*) Юные техники собрали трек для испытания своих моделей. Круглый трек состоит из трёх дорожек. Внутренняя дорожка покоится, средняя движется по часовой стрелке со скоростью 1 м/с, а внешняя движется в ту же сторону, что и средняя, со скоростью 1,9 м/с. Когда по треку по часовой стрелке запустили модель автомобильчика, оказалось, что наименьшее время понадобилось автомобилю для совершения круга по средней дорожке, а наибольшее — по внутренней дорожке. Определить скорость модели с ошибкой не более 0,2 м/с, если радиусы дорожек $R_1 = 5$ м, $R_2 = 7$ м, $R_3 = 9$ м. Какова наилучшая возможная точность?




$v = 2{,}26 \pm 0{,}12$ м/с

Задача 16. (*МОШ, 2016, 10*) Самолёт в новогоднюю ночь в безветренную погоду стартовал с аэродрома Санкт-Петербурга ($60^\circ$ северной широты) и летит на постоянной высоте $h = 5$ км с постоянной по величине скоростью $V = 1000$ км/час, держа всё время курс на северо-восток (по звёздам). С каким по модулю ускорением относительно Земли (в системе отсчета Птолемея) движется самолёт ровно через время $T$, равное четырём часам полёта? Землю можно считать шаром с радиусом $R = 6400$ км.

$\boxed{\approx 0{,}1\ \text{м/с}^2}$

Задача 17. (*МОШ, 2018, 10*) По поверхности стоящего неподвижно небольшого школьного глобуса радиусом $R = 9$ см бежит маленький таракан с постоянной по модулю скоростью $V = 3$ см/с. По отношению к разметке глобуса его скорость все время направлена на северо-восток. Каково по модулю ускорение таракана в тот момент, когда он наступает на кружочек, соответствующий положению Санкт-Петербурга ($\varphi = 60^\circ$ северной широты)? Глобус не вращается.

$\boxed{a = \frac{V^2}{R}\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1{,}58\ \text{см/с}^2}$

Задача 18. (*«Росатом», 2011, 11*) В некоторой планетной системе вокруг центральной звезды в одной плоскости и в одну сторону вращаются две планеты — Атлант и Кариатида. Период обращения Атланта меньше периода обращения Кариатиды. Между двумя моментами времени, когда Атлант и Кариатида находятся на одном и том же радиусе, проведённом к ним из центральной звезды, проходит минимальный интервал времени, равный 1,2 кариатидным годам. Сколько атлантских лет проходит между этими моментами?

$\boxed{2{,}2}$

Задача 19. (*«Росатом», 2015, 8–10*) Фигуристы исполняют следующий элемент: фигуристка вращается с постоянной скоростью вокруг своей оси, фигурист также с постоянной скоростью совершает обороты вокруг партнерши (в том же направлении). Известно, что фигурист сделал два полных оборота вокруг партнерши за время $t = 10$ с, за это время фигуристка $n = 9$ раз повернулась лицом к своему партнеру, причем первый раз (из этих 9) фигуристка была повёрнута к нему лицом в самом начале элемента, последний — в конце. За какое время фигуристка совершает один оборот?

$\boxed{t_1 = \frac{t}{n+1} = 1\ \text{с}}$

Задача 20. (*МОШ, 2018, 10*) На фотографии, сделанной камерой мобильного телефона, представлен вращающийся пропеллер самолёта. Наблюдаемый эффект «смазывания» изображения обусловлен способом обработки светового потока матрицей фотокамеры. Во время срабатывания фотокамеры матрица «захватывает» не всю снимаемую сцену целиком одновременно, а происходит очень быстрое поэтапное сканирование кадра в направлении слева направо (с точки зрения фотографа). В результате в память фотокамеры последовательно попадают узкие вертикальные «полоски» изображения, причём «линия сканирования» движется с постоянной скоростью.

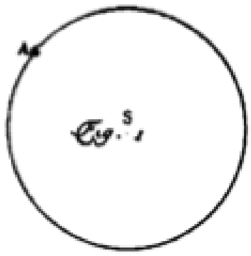
1) В каком направлении вращается пропеллер с точки зрения фотографа?

2) Сколько лопастей у пропеллера?

3) Оцените, сколько оборотов в секунду делает пропеллер, если процесс получения всего изображения занял 1/8 секунды.

1) Против часовой; 2) три; 3) $15 \pm 1$

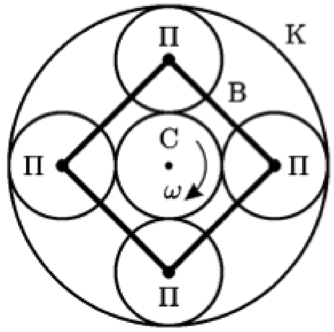
Задача 21. (*«Росатом», 2011, 11*) 26 мая 1761 года М. В. Ломоносов наблюдал редкое явление — движение Венеры на фоне солнечного диска. Предполагая, что траектория Венеры пересекала солнечный диск по диаметру, вычислить время, в течение которого Венера проецировалась на солнечный диск. Считать, что орбиты Земли и Венеры — круговые с отношением радиусов $x = R_З/R_В = 1{,}4$; Земля и Венера вращаются вокруг Солнца в одну сторону с отношением периодов $y = T_З/T_В = 1{,}6$; угловой диаметр Солнца $\Delta\alpha = 0{,}01$ рад. Вращением Земли вокруг своей оси пренебречь. $T_З = 8800$ часов. Ответ привести в часах.



*Примечание.* Во время этого наблюдения М. В. Ломоносов установил наличине у Венеры плотной — «знатной» по словам М. В. Ломоносова — атмосферы. На рисунке приведён оригинальный рисунок М. В. Ломоносова из отчёта Академии наук: здесь круг $S$ — солнечный диск, $A$ — Венера, проецирующаяся на край Солнца. Небольшое «выпячивание» Солнца в сторону Венеры около точки $A$ возникает благодаря преломлению солнечных лучей в атмосфере Венеры.

$\tau = \frac{\Delta\alpha(x-1)}{2\pi(y-1)} T_З = 9{,}3$ часа

Задача 22. (*МОШ, 2007, 11*) Одна из разновидностей так называемой планетарной передачи состоит из центральной (солнечной) шестерни (С), нескольких планетарных шестерён (П), оси которых соединены жёсткой рамой — водилом (В), и кольцевой шестерни (К), имеющей внутреннее зацепление с планетарными. Пусть радиусы солнечной и планетарных шестерён равны и солнечная шестерня приводится во вращение с угловой скоростью $\omega$. С какой угловой скоростью будет вращаться кольцевая шестерня, если водило зафиксировано? С какой угловой скоростью будет вращаться водило, если кольцевая шестерня зафиксирована? С какой угловой скоростью в последнем случае будет вращаться планетарная шестерня?




$\omega/3$ (против солнечной); $\omega/4$ (туда же); $\omega/2$ (против)

Задача 23. (*МОШ, 2015, 7–9*) Велосипедист Владислав и пешеход Ярослав участвуют в гонках, начав движение одновременно в одном направлении с отметки «Старт». Часы Владислава показывали:

- в момент старта — 11:15;
- в момент, когда Владислав проехал один круг и вновь оказался на отметке «Старт», — 11:23;
- в момент, когда Владислав обогнал Ярослава, проехав ровно на один круг больше, — 11:26.

Каким может быть отношение скорости Владислава к скорости Ярослава? Скорости движения как велосипедиста, так и пешехода считайте постоянными. При решении задачи учитывайте, что часы Владислава показывают только часы и минуты (секунды не показывают). В частности, в моменты времени от 11 ч 15 мин до 11 ч 16 мин часы показывают 11:15.

$2{,}75 \leqslant \frac{v_В}{v_Я} \leqslant 5{,}5$

Задача 24. (*МОШ, 2014, 7–11*) Школьницы Алиса и Василиса участвуют в соревнованиях по бегу.

В первом состязании Алиса и Василиса стартовали одновременно в одном направлении. Василиса отстала от Алисы сразу после старта. Пробегая 3-й круг, Василиса заметила, что Алиса впервые после старта обогнала её.

Во втором состязании Алиса и Василиса бежали эстафету: 2 круга бежала Алиса и 2 круга — Василиса. Девочки очень обрадовались, что обогнали своего одноклассника Петра, бежавшего всю дистанцию эстафеты без напарника с постоянной скоростью 12 км/ч: во время финиша Василисы Пётр всё ещё бежал последний круг.

При решении задачи скорость каждой из школьниц можно считать постоянной.

A) Найдите минимально возможную скорость Алисы при данных условиях.

B) Найдите максимально возможную скорость Алисы при данных условиях.

C) Найдите минимально возможную скорость Василисы при данных условиях.

D) Найдите максимально возможную скорость Василисы при данных условиях.

Ответ представьте в км/ч и округлите до второй значащей цифры.

A) 14; B) 20; C) 10; D) 14