

## Система двух линз

Оптические приборы обычно содержат несколько линз (в объективах современных фотоаппаратов их может быть, например, 10–20). Простейшие системы, состоящие из двух линз, часто встречаются в задачах.

Первая линза создаёт изображение рассматриваемого предмета, и это изображение, в свою очередь, служит предметом для второй линзы. При этом, если на вторую линзу падает сходящийся пучок лучей, то может оказаться полезным понятие мнимого предмета (или мнимого источника).

**ЗАДАЧА 1.** (*Мнимый источник и собирающая линза*) Пучок света с осью симметрии  $l$  сходится в точке  $S$ . На пути пучка на расстоянии  $a$  от точки  $S$  поставили собирающую линзу, главная оптическая ось которой совпадает с прямой  $l$ . Фокусное расстояние линзы равно  $f$ .

1) Постройте точку  $P$ , в которой пересекутся лучи пучка после прохождения линзы. Покажите, что при любой величине  $a$  точка  $P$  будет расположена между линзой и фокусом.

2) Убедитесь, что точка  $S$  служит мнимым изображением точки  $P$  в этой линзе.

3) Пусть  $b$  — расстояние между точкой  $P$  и линзой. Запишите формулу линзы, связывающую величины  $a$ ,  $b$  и  $f$ . Дайте интерпретацию формулы линзы, понимая  $S$  как мнимый источник света, а  $P$  — как его действительное изображение.

**ЗАДАЧА 2.** (*Мнимый источник и рассеивающая линза: действительное изображение*) Пучок света с осью симметрии  $l$  сходится в точке  $S$ . На пути пучка на расстоянии  $a$  от точки  $S$  поставили рассеивающую линзу, главная оптическая ось которой совпадает с прямой  $l$ . Фокусное расстояние линзы (по модулю) равно  $f$ , причём  $f > a$ .

1) Постройте точку  $P$ , в которой пересекутся лучи пучка после прохождения линзы.

2) Убедитесь, что точка  $S$  служит мнимым изображением точки  $P$  в этой линзе.

3) Пусть  $b$  — расстояние между точкой  $P$  и линзой. Запишите формулу линзы, связывающую величины  $a$ ,  $b$  и  $f$ . Дайте интерпретацию формулы линзы, понимая  $S$  как мнимый источник света, а  $P$  — как его действительное изображение.

**ЗАДАЧА 3.** (*Мнимый источник и рассеивающая линза: мнимое изображение*) Пучок света с осью симметрии  $l$  сходится в точке  $S$ . На пути пучка на расстоянии  $a$  от точки  $S$  поставили рассеивающую линзу, главная оптическая ось которой совпадает с прямой  $l$ . Фокусное расстояние линзы (по модулю) равно  $f$ , причём  $f < a$ .

1) Постройте точку  $P$ , в которой пересекутся продолжения лучей пучка после прохождения линзы.

2) Убедитесь, что если на место данной линзы поставить собирающую линзу с тем же фокусным расстоянием  $f$ , то точка  $S$  окажется действительным изображением точки  $P$ .

3) Пусть  $b$  — расстояние между точкой  $P$  и линзой. Запишите формулу линзы, связывающую величины  $a$ ,  $b$  и  $f$ . Дайте интерпретацию формулы линзы, понимая  $S$  как мнимый источник света, а  $P$  — как его мнимое изображение.

ЗАДАЧА 4. Оптическая система состоит из двух одинаковых собирающих линз с фокусным расстоянием  $f$ , расположенных на расстоянии  $4f$  друг от друга (главные оптические оси линз совпадают). Предмет находится на расстоянии  $a = 3f$  от первой линзы и расположен перпендикулярно главной оптической оси системы. Постройте изображение предмета в данной системе. Найдите расстояние  $b$  от изображения до второй линзы и увеличение  $\Gamma$ , даваемое системой.

$$\frac{\xi}{l} = \tau \cdot \Gamma \cdot l = l \cdot f \frac{\xi}{\xi} = q$$

ЗАДАЧА 5. Оптическая система состоит из двух одинаковых собирающих линз с фокусным расстоянием  $f$ , расположенных на расстоянии  $f$  друг от друга (главные оптические оси линз совпадают). Предмет находится на расстоянии  $a = f/3$  от первой линзы и расположен перпендикулярно главной оптической оси системы. Постройте изображение предмета в данной системе. Найдите расстояние  $b$  от изображения до второй линзы и увеличение  $\Gamma$ , даваемое системой.

$$\xi = l \cdot f \xi = q$$

ЗАДАЧА 6. Оптическая система состоит из двух одинаковых собирающих линз с фокусным расстоянием  $f$ , расположенных на расстоянии  $2f$  друг от друга (главные оптические оси линз совпадают). Предмет находится на расстоянии  $a = 4f/3$  от первой линзы и расположен перпендикулярно главной оптической оси системы. Постройте изображение предмета в данной системе. Найдите расстояние  $b$  от изображения до второй линзы и увеличение  $\Gamma$ , даваемое системой.

$$l = l \cdot f \frac{\xi}{\xi} = q$$

ЗАДАЧА 7. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием  $f$  и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием  $2f$ , расположенных на расстоянии  $f$  друг от друга (главные оптические оси линз совпадают). Предмет находится на расстоянии  $a = 2f$  от собирающей линзы и расположен перпендикулярно главной оптической оси системы. Постройте изображение предмета в данной системе. Найдите расстояние  $b$  от изображения до рассеивающей линзы и увеличение  $\Gamma$ , даваемое системой.

$$z = l \cdot f \tau = q$$

ЗАДАЧА 8. («Физтех», 2009) Оптическая система состоит из расположенных друг за другом рассеивающей линзы с фокусным расстоянием  $-10$  см и собирающей линзы с неизвестным фокусным расстоянием. Оптические оси линз совпадают. Предмет расположен перпендикулярно оптической оси перед рассеивающей линзой на расстоянии  $10$  см от неё. Система создаёт изображение предмета в натуральную величину на экране, находящемся за собирающей линзой на расстоянии  $30$  см от неё.

- 1) На каком расстоянии от себя создаёт изображение предмета рассеивающая линза?
- 2) Найдите расстояние между линзами.

$$(1) \xi \text{ см}; (2) 10 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 9. («Физтех», 2009) С помощью тонкой линзы на экране получили изображение предмета, расположенного перпендикулярно оптической оси линзы. Между линзой и экраном поставили вторую линзу на расстоянии 5 см от экрана, после чего экран пришлось отодвинуть от линз на 5 см, чтобы получить на нём новое изображение.

- 1) Найдите фокусное расстояние второй линзы.
- 2) Каково отношение размеров нового и старого изображений?

$$z = 1 \text{ (2) } 01 - = f \text{ (1)}$$

ЗАДАЧА 10. (МФТИ, 2006) Оптическая система, состоящая из двух собирающих линз с фокусными расстояниями  $F_1 = 20$  см и  $F_2 = 30$  см, расположенных соосно на одной оптической оси, даёт на экране прямое изображение предмета с увеличением  $\Gamma_0 = 1$ . Расстояние от предмета до ближайшей к нему линзы с фокусным расстоянием  $F_1$  равно  $a = 60$  см.

- 1) На какое расстояние вдоль оптической оси требуется переместить вторую линзу, чтобы на том же экране получить новое изображение предмета?
- 2) Какое увеличение будет при этом давать оптическая система?

$$\frac{z}{1} = 1 \text{ (2) } 45 \text{ см; } 2) \Gamma = x \text{ (1)}$$

ЗАДАЧА 11. (МФТИ, 2006) Оптическая система, состоящая из расположенных соосно на одной оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием  $F_1 = -30$  см и собирающей линзы с неизвестным фокусным расстоянием, даёт на экране перевёрнутое изображение предмета. Расстояние от предмета до ближайшей к нему рассеивающей линзы равно  $a = 30$  см. Собирающую линзу переместили вдоль оптической оси на  $l = 45$  см, и на экране получилось перевёрнутое изображение предмета с увеличением  $\Gamma = 1$ .

- 1) Найдите фокусное расстояние собирающей линзы.
- 2) С каким увеличением изображался предмет вначале?

$$\frac{z}{1} = 0 \text{ (2) } 30 \text{ см; } 2) \Gamma_0 = z \text{ (1)}$$

ЗАДАЧА 12. Две линзы находятся на очень малом расстоянии друг от друга (много меньшем их фокусных расстояний). Докажите, что оптическая сила данной системы равна сумме оптических сил этих линз.

ЗАДАЧА 13. («Физтех», 2012) Шарик на пружине совершает вертикальные колебания, двигаясь перпендикулярно главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием  $F_1 = 20$  см. На экране, который можно перемещать, получено изображение шарика. При этом максимальная скорость изображения оказалась в два раза больше максимальной скорости шарика.

- 1) Найдите расстояние между шариком и линзой.
- 2) Найдите фокусное расстояние  $F_2$  ( $F_2 < 0$ ) рассеивающей линзы, которую надо поместить вплотную к собирающей линзе, чтобы максимальная скорость изображения увеличилась в три раза по сравнению с предыдущей.

$$1) 30 \text{ см; } 2) -90 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 14. («Физтех», 2012) Висящий на пружине груз совершает вертикальные колебания, двигаясь перпендикулярно главной оптической оси линзы с фокусным расстоянием  $F_1 = 32$  см. На экране, который можно перемещать, получено изображение груза. При этом максимальная скорость изображения оказалась в 8 раз больше максимальной скорости груза.

- 1) Найдите расстояние между грузом и линзой.
- 2) Найдите фокусное расстояние  $F_2$  собирающей линзы, которую надо поместить вплотную к первой линзе, чтобы максимальная скорость изображения уменьшилась в 4 раза по сравнению с предыдущей.

$$\boxed{1 \text{ 36 см; } 2 \text{ 96 см}}$$

ЗАДАЧА 15. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Рассеивающая линза даёт изображение предмета с увеличением  $\Gamma_1 = 1/5$ . Если вплотную к ней приставить тонкую собирающую линзу, то эта система создаёт прямое изображение с увеличением  $\Gamma_2 = 1/3$ . Определить, с каким увеличением получится изображение от одной собирающей линзы. Расстояние от линзы до предмета во всех случаях одинаково.

$$\boxed{\Gamma = \frac{2\Gamma_1\Gamma_2 - \Gamma_1 - \Gamma_2}{\Gamma_1\Gamma_2} = 1}$$

ЗАДАЧА 16. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями  $F_1 = F$ ,  $F_2 = F/2$ . Главные оптические оси линз совмещены. Точечный источник света расположен на расстоянии  $d_1 = 3F/2$  перед первой линзой, а его изображение — на расстоянии  $f_2 = F/3$  за второй линзой. На каком расстоянии  $L$  друг от друга находятся линзы?

$$\boxed{L = 7F}$$

ЗАДАЧА 17. (МФТИ, 1992) Две тонкие положительные линзы расположены друг за другом так, что их главные оптические оси совпадают. Расстояние между линзами 14 см. Фокусное расстояние первой линзы  $F_1 = 10$  см, второй —  $F_2 = 4$  см. Эта система создаёт изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси. Величина изображения  $h_1 = 4$  мм. Какой будет величина изображения  $h_2$ , если линзы поменять местами?

$$\boxed{h_2 = \frac{F_1}{F_2} h_1 = 2,5 \text{ см}}$$

ЗАДАЧА 18. (МФТИ, 1992) За линзой с фокусным расстоянием  $F_1 = -5$  см расположена линза с фокусным расстоянием  $F_2 = 25$  см так, что их главные оптические оси совпадают. Эта оптическая система создаёт изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси. Как изменится величина изображения, если линзы поменять местами? Расстояние между линзами  $L = 20$  см.

$$\boxed{\text{Изменится в } \frac{F_1}{F_2} = 25 \text{ раз}}$$

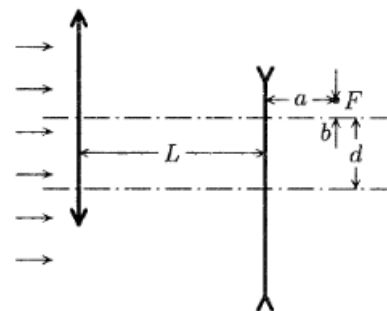
ЗАДАЧА 19. (МФТИ, 2000) Точечный источник света расположен на главной оптической оси слева от линзы с фокусным расстоянием  $F_1 = -10$  см. Расстояние от источника до рассеивающей линзы  $d = 40$  см. На расстоянии  $L = 20$  см слева от рассеивающей линзы расположена собирающая линза. Главные оптические оси линз совпадают. Найти фокусное расстояние собирающей линзы, если из системы линз выходит параллельный пучок света.

$$\boxed{F_2 = 12 \text{ см}}$$

Задача 20. (МФТИ, 2000) Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием  $F_1 = -30$  см слева от неё на расстоянии  $d = 70$  см. На каком расстоянии от рассеивающей линзы надо поместить справа от неё тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F_2 = 50$  см, чтобы из системы выходил параллельный пучок света? Главные оптические оси линз совпадают.

$$\text{мс } 6z = \frac{p-l_d}{p \cdot l_d} - z_d = l$$

Задача 21. (МФТИ, 2002) Оптическая система состоит из двух линз: собирающей и рассеивающей (см. рисунок), главные оптические оси которых параллельны и смещены друг относительно друга на расстояние  $d = 1$  см. Параллельный пучок света, направленный на систему параллельно главным оптическим осям, фокусируется системой в точке  $F$ , расположенной на расстоянии  $a = 10$  см от рассеивающей линзы.

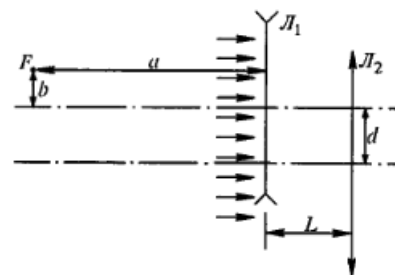


- 1) Найти расстояние между линзами  $L$ .
- 2) Найти расстояние  $b$  от фокуса  $F$  до главной оптической оси собирающей линзы.

Фокусные расстояния линз  $F_1 = 40$  см,  $F_2 = -40$  см.

$$\text{мс } 1) L = F_1 - \frac{a \cdot F_2}{a + F_2} = 32 \text{ см}; 2) b = \frac{a \cdot F_1}{L} = 0,25 \text{ см}$$

Задача 22. (МФТИ, 2002) Оптическая система состоит из рассеивающей линзы  $L_1$  и собирающей линзы  $L_2$ , расположенных на расстоянии  $L = 10$  см друг от друга (см. рисунок). Главные оптические оси линз параллельны. Параллельный пучок света, падающий перпендикулярно плоскостям линз, фокусируется системой в точке  $F$ , расположенной слева от рассеивающей линзы  $L_1$  на расстоянии  $a = 30$  см от неё и на расстоянии  $b = 1$  см от её оптической оси.

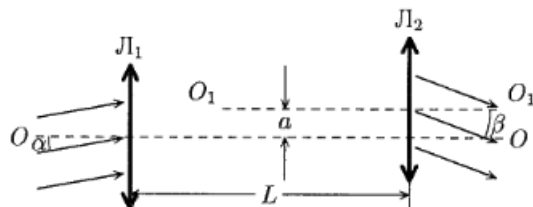


- 1) Найти фокусное расстояние  $F_2$  собирающей линзы  $L_2$ .
- 2) Определить расстояние  $d$  между оптическими осями линз.

Фокусное расстояние линзы  $L_1$  равно  $F_1 = -10$  см.

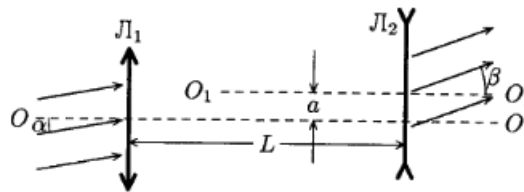
$$\text{мс } 1) F_2 = \frac{(a+L)(L+v)}{L+v} = 40 \text{ см}; 2) d = \frac{L \cdot v}{(L+v) \cdot F_1} = 1 \text{ см}$$

Задача 23. (МФТИ, 2004) Параллельный пучок света падает на систему двух собирающих линз, главные оптические оси которых параллельны ( $OO \parallel O_1O_1$ ) и находятся на расстоянии  $a = 0,1$  см друг от друга, под малым углом  $\alpha = 0,1$  рад к ним (см. рисунок) и, пройдя через линзы, отклоняется на малый угол  $\beta = 0,2$  рад от оптических осей линз. Определить фокусные расстояния линз  $F_1$  и  $F_2$ , если расстояние между линзами  $L = 10$  см.



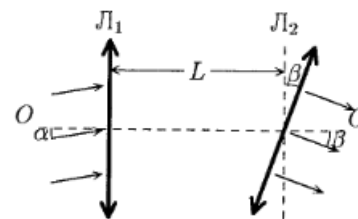
$$\text{мс } F_1 = \frac{a+v}{L+v} = 3 \text{ см}, \text{ мс } L = \frac{L \cdot v}{L+v} = F_2$$

Задача 24. (МФТИ, 2004) Параллельный пучок света падает на систему двух линз — собирающую  $L_1$  и рассеивающую  $L_2$  — под малым углом  $\alpha = 0,1$  рад к их оптическим осям. Оптические оси линз параллельны и находятся на расстоянии  $a = 0,1$  см друг от друга (см. рисунок). После прохождения оптической системы пучок света отклоняется от оптических осей линз на малый угол  $\beta = 0,2$  рад. Найти фокусные расстояния линз  $F_1$  и  $F_2$ , если расстояние между линзами  $L = 10$  см.



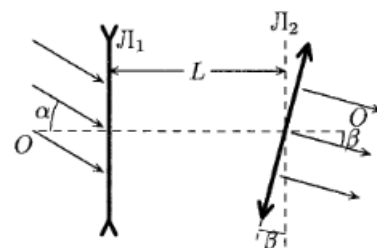
$$F_1 = \frac{L}{\alpha - \beta}, F_2 = \frac{L}{\alpha + \beta}$$

Задача 25. (МФТИ, 2004) Параллельный пучок света падает на систему двух собирающих линз  $L_1$  и  $L_2$ , оптические центры которых лежат на прямой  $OO$ , под малым углом  $\alpha = 0,2$  рад к главной оптической оси линзы  $L_1$  (см. рисунок). Линза  $L_2$  повернута на малый угол  $\beta = 0,1$  рад относительно плоскости линзы  $L_1$ . Оказалось, что падающий пучок света, пройдя через систему линз, отклонился на угол  $\beta$  относительно оси  $OO$ . Определить фокусные расстояния линз  $F_1$  и  $F_2$ , если расстояние между оптическими центрами линз  $L = 10$  см.



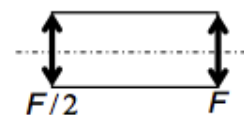
$$F_1 = \frac{L}{\alpha + \beta}, F_2 = \frac{L}{\alpha - \beta}$$

Задача 26. (МФТИ, 2004) Параллельный пучок света падает на систему двух линз (рассеивающую  $L_1$  и собирающую  $L_2$ ), оптические центры которых лежат на прямой  $OO$  на расстоянии  $L = 10$  см друг от друга, под малым углом  $\alpha = 0,2$  рад к главной оптической оси линзы  $L_1$  (см. рисунок). Линза  $L_2$  повернута на малый угол  $\beta = 0,1$  рад относительно плоскости линзы  $L_1$ . Оказалось, что падающий пучок света, пройдя через систему линз, отклонился на угол  $\beta$  относительно оси  $OO$ . Определить фокусные расстояния линз  $F_1$  и  $F_2$ .



$$F_1 = \frac{L}{\alpha - \beta}, F_2 = \frac{L}{\alpha + \beta}$$

Задача 27. («Росатом», 2013, 11) Две собирающие линзы одинакового диаметра вставлены в трубу с зачернёнными внутренними боковыми стенками (все лучи, падающие на стенки, поглощаются). Известно, что фокусное расстояние одной линзы вдвое больше фокусного расстояния другой, и что параллельные лучи, падающие вдоль оси трубы с любой стороны, после прохождения трубы остаются параллельными. На трубу падает пучок параллельных лучей одинаковой интенсивности сначала слева, а потом справа. Найти отношение освещённостей экрана, расположенного соответственно справа и слева от трубы.



$$1:1$$

ЗАДАЧА 28. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями  $F_1 = F$ ,  $F_2 = F/2$ . Главные оптические оси линз совмещены. Точечный источник света расположен на расстоянии  $d_1 = 3F/2$  перед первой линзой, а его изображение — на расстоянии  $f_2 = F/3$  за второй линзой. На каком расстоянии  $L$  друг от друга находятся линзы?

$$d_1 = 1.5F$$

ЗАДАЧА 29. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) С помощью объектива, состоящего из собирающей и рассеивающей линзы, величины фокусных расстояний которых совпадают ( $F_1 = -F_2 = F$ ), расположенных на общей оси на расстоянии  $L = 2F/3$  друг от друга, получили на экране изображение Солнца. Затем точно такое же по размеру изображение Солнца на этом экране удалось получить с помощью одной линзы. Чему равно её фокусное расстояние?

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L}$$

ЗАДАЧА 30. («Покори Воробьёвы горы!», 2016, 10–11) Две тонкие линзы расположены на общей оптической оси на расстоянии  $L$  друг от друга. На той же оси на таком же расстоянии  $L$  от ближайшей из них расположен точечный источник света, лучи от которого последовательно проходят через обе линзы. Если ближе к источнику размещена линза с большей оптической силой, то изображение источника находится на расстоянии  $2L$  за дальней линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии  $3L/2$  за дальней линзой. Найти фокусные расстояния обеих линз.

$$2f_1 = 2L, f_2 = L$$

ЗАДАЧА 31. («Покори Воробьёвы горы!», 2017, 10–11) В тонкой непрозрачной ширме есть круглое отверстие, в которое плотно вставлена тонкая линза (радиус линзы совпадает с радиусом отверстия). По одну сторону от линзы на расстоянии  $L = 40$  см от неё помещён экран, плоскость которого параллельна плоскости линзы. По другую сторону от линзы на её оптической оси располагают точечный источник света — таким образом, чтобы на экране наблюдалось его чёткое изображение. Когда к этой линзе плотно прижали вторую тонкую линзу, радиус которой чуть больше радиуса первой, на экране образовалось светлое пятно с радиусом в  $n = 2$  раза меньше радиуса отверстия в ширме. Найти оптическую силу второй линзы. Известно, что вторая линза — собирающая.

$$d_{12} = 2L, f_2 = \frac{L}{n} = 20 \text{ см}$$

ЗАДАЧА 32. (МОШ, 2010, 11) Две собирающие линзы с фокусными расстояниями  $f_1 = 20$  см и  $f_2 = 10$  см расположены на одной прямой так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система линз формирует действительное изображение прямоугольника со сторонами  $a_1 = 1$  мм и  $b_1 = 2$  мм, также являющегося прямоугольником. Сторона  $a_1$  прямоугольника лежит на главной оптической оси системы. На каком расстоянии  $L$  друг от друга расположены линзы? Каковы размеры изображения  $a_2$  и  $b_2$ ?

$$d_{12} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} = \frac{20 \cdot 10}{20 + 10} = \frac{200}{30} = \frac{20}{3} \text{ см}$$