

# Дифференциальные уравнения

## Содержание

1	Понятие дифференциального уравнения . . . . .	1
2	Примеры дифференциальных уравнений . . . . .	2
3	Первообразная и определённый интеграл . . . . .	4
4	Непосредственное интегрирование дифференциального уравнения . . . . .	4
5	Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	5

Многие законы физики формулируются на языке дифференциальных уравнений. Поэтому уметь интегрировать и решать хотя бы простейшие дифференциальные уравнения жизненно необходимо для решения физических задач.

## 1 Понятие дифференциального уравнения

Что это вообще такое — дифференциальные уравнения? Мы постараемся дать представление об этом на физическом примере.

Возьмём второй закон Ньютона:  $ma = F$ . Для простоты мы рассматриваем движение тела вдоль оси  $x$ , так что  $a$  и  $F$  суть проекции векторов ускорения и силы на данную ось. Величина  $a$  зависит от времени и является второй производной координаты:

$$a = a(t) = \ddot{x}(t).$$

Сила же, вообще говоря, может зависеть:

- от координаты  $x$  (например, закон Гука, закон всемирного тяготения, закон Кулона);
- от скорости  $\dot{x}$  (например, сила сопротивления среды);
- явным образом от времени (например, движение заряда в меняющемся со временем электрическом поле).

В результате второй закон Ньютона даёт нам соотношение

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t). \quad (1)$$

Посмотрим, что получится в каком-нибудь содержательном конкретном случае. Возьмём маятник на пружине ( $F_1 = -kx$ ), который движется в среде с вязким трением ( $F_2 = -\alpha\dot{x}$ ), да к тому же имеет заряд  $q$  и находится в однородном электрическом поле, синусоидально меняющемся со временем ( $F_3 = qE_0 \sin \omega t$ ). Уравнение (1) тогда примет вид:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + qE_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Что с этим делать дальше? Наша конечная цель — *понять, как маятник движется*; иными словами, нам нужно решить *основную задачу механики* — найти зависимость координаты  $x$  маятника от времени, то есть функцию  $x = x(t)$ . Эту функцию как раз и требуется «извлечь» из уравнения (2). Для однозначного нахождения данной функции нужно ещё указать, в каком

месте маятник находился в начальный момент времени и какую скорость при этом имел; иными словами, следует добавить *начальные условия*

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (3)$$

Соотношение (2) служит примером *дифференциального уравнения*. Оно связывает искомую функцию  $x(t)$  с её производными и является уравнением *относительно неизвестной функции*  $x(t)$ . Обратите внимание на это ключевое отличие дифференциальных уравнений от алгебраических: например, решая квадратное уравнение  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , мы ищем *числа*, являющиеся его корнями; решая же дифференциальное уравнение  $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$ , мы ищем *функцию*  $x(t)$ , при подстановке которой в данное уравнение получается верное равенство для любого  $t$ .

Возвращаясь от примера маятника к общему случаю, мы теперь можем сказать следующее: найти решение основной задачи механики означает решить дифференциальное уравнение (1) с начальными условиями (3).

## 2 Примеры дифференциальных уравнений

В дальнейшем мы будем чередовать «математическое» и «физическое» обозначения производной (штрихом и точкой соответственно). В «математической» ситуации запись  $f'(x)$  означает производную функции  $f$  аргумента  $x$ ; в «физической» же ситуации запись  $\dot{x}(t)$  означает производную координаты  $x$  по времени  $t$ . Из контекста вам не составит труда определить, какие обозначения используются в каждом конкретном случае.

**ЗАДАЧА 1.** Число  $e = 2,718281828459045\dots$  — одна из важнейших констант математики и физики. Функция  $e^x$  замечательна тем, что совпадает со своей производной:  $(e^x)' = e^x$ .

1) Покажите, что функция  $x(t) = 3e^t + 5e^{2t}$  служит решением дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0. \quad (4)$$

2) Покажите, что функция

$$x(t) = Ae^t + Be^{2t}, \quad (5)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные константы, служит решением дифференциального уравнения (4).

Оказывается, что формула (5) даёт *общее решение* данного дифференциального уравнения; а именно, можно доказать, что любое решение уравнения (4) имеет вид (5) при некоторых значениях констант  $A$  и  $B$  (иными словами, никаких других решений, помимо функций вида (5), у уравнения (4) нет).

**ЗАДАЧА 2.** Найдите решение уравнения  $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$ .

$$\boxed{x'' - 3x' = x}$$

**ЗАДАЧА 3.** (*Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами*) Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = 0 \quad (6)$$

с постоянными коэффициентами  $p$  и  $q$ . Сопоставим ему *характеристическое уравнение*

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

(то есть квадратное уравнение относительно  $\lambda$  с теми же коэффициентами). Предположим, что характеристическое уравнение имеет два различных корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Покажите, что функция

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (7)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы, служит решением уравнения (6).

Можно доказать, что функциями вида (7) исчерпываются все решения уравнения (6); или, в уже известной вам терминологии, функция (7) является общим решением уравнения (6) в том случае, когда характеристическое уравнение имеет два различных корня.

Всё это несколько проясняет, зачем нужны *два* начальных условия (3). Дело в том, что второй закон Ньютона приводит к дифференциальному уравнению *второго* порядка (то есть наивысшая производная в нём — вторая), общее решение которого содержит *две* произвольные константы. Для определения значений этих констант нужны *два* дополнительных независимых алгебраических уравнения, которые как раз и возникают в результате задания начальных значений функции и её производной (в чём вы могли убедиться, решая задачу 2).

**ЗАДАЧА 4.** Покажите, что функция  $x(t) = 2 \cos 3t + 4 \sin 3t$  служит решением дифференциального уравнения  $\ddot{x} + 9x = 0$ .

**ЗАДАЧА 5.** Уравнение гармонических колебаний — это дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (8)$$

Покажите, что функция

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (9)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные константы, служит решением уравнения (8).

Можно доказать, что функция (9) является общим решением уравнения (8). Методом вспомогательного угла можно получить эквивалентную запись функции (9):

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \alpha).$$

Здесь  $x_m = \sqrt{A^2 + B^2}$  — амплитуда колебаний,  $\alpha$  — начальная фаза.

**ЗАДАЧА 6.** Найдите решение уравнения  $\ddot{x} + 4x = 0$ , удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 6$ .

$$\boxed{x = 3 \sin 2t}$$

**ЗАДАЧА 7.** Найдите общее решение уравнения  $\ddot{x} + \omega^2 x = a$ , где  $a$  — константа.

$$\boxed{x = \frac{a}{\omega^2} + A \cos \omega t + B \sin \omega t}$$

Всё, что мы делали до сих пор, сводилось к простым техническим действиям: требовалось лишь подставлять и дифференцировать. Сложностей не возникало, поскольку вид общего решения сообщался заранее (мы знали, *что именно* надо подставлять). Во многих случаях, однако, главная проблема заключается в том, что вид общего решения дифференциального уравнения заранее *неизвестен*, то есть уравнение надо *решать*.

В процессе решения дифференциальных уравнений часто приходится *интегрировать*, то есть выполнять операцию, обратную дифференцированию. Поэтому для начала надо поупражняться в простом интегрировании.

### 3 Первообразная и определённый интеграл

Пусть дана функция  $f(x)$ . Её *первообразной* называется функция  $F(x)$  такая, что  $F'(x) = f(x)$ .

ЗАДАЧА 8. Найдите первообразную функции: 2 (константа),  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ .

Первообразных у функции  $f(x)$  много: если  $F(x)$  — одна из них, то, например,  $F(x) + 1$  или  $F(x) - 2$  также будут первообразными.

ЗАДАЧА 9. Докажите, что любые две первообразные данной функции отличаются на константу; иными словами, всё семейство первообразных данной функции имеет вид  $F(x) + C$ , где  $F(x)$  — какая-то одна из первообразных,  $C$  — произвольная постоянная.

Семейство всех первообразных функции  $f(x)$  называется *неопределённым интегралом*:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (10)$$

В этом контексте произвольная константа  $C$  называется *константой интегрирования*. Про неё никогда не надо забывать!

ЗАДАЧА 10. Вычислите неопределённый интеграл от функции:  $A$  (константа),  $x^\alpha$  ( $\alpha \neq -1$ ),  $\sqrt{x}$ ,  $x\sqrt{x}$ ,  $e^{\alpha x}$ ,  $3 \cos 2x + 4 \sin 2x$ . Результат запишите в виде (10).

Через первообразную выражается *определённый интеграл* от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ , то есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и осью  $x$ . Именно, справедлива *формула Ньютона — Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

ЗАДАЧА 11. Найдите площадь под графиком функции:

- а)  $y = x^2$  на отрезке  $[1; 2]$ ;
- б)  $y = \sin x$  на отрезке  $[0; \pi]$ ;
- в)  $y = e^{-x}$  при  $x \geq 0$ .

□

### 4 Непосредственное интегрирование дифференциального уравнения

В самом простом случае дифференциальное уравнение допускает непосредственное интегрирование. Так, уравнение  $y' = f(x)$  относительно неизвестной функции  $y$  имеет общее решение

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

ЗАДАЧА 12. Решите уравнение  $y' = 8x^3$  с начальным условием  $y(1) = 0$ .

□

ЗАДАЧА 13. Решите уравнение  $y'' = 2$  с начальными условиями  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -3$ .

$$\boxed{1 + x^2 - \frac{1}{2}x = 6}$$

ЗАДАЧА 14. Решите уравнение  $\ddot{x} = a$  (где  $a$  — константа) с начальными условиями  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$ .

$$\boxed{\frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = x}$$

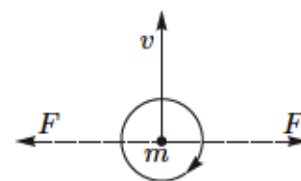
ЗАДАЧА 15. На оси  $x$  в точке  $x = 0$  покоится частица массой  $m$ . В момент времени  $t = 0$  на неё начинает действовать сила, линейно растущая со временем:  $F = bt$ . Найдите зависимость координаты частицы от времени.

$$\boxed{\frac{bt^3}{6m} = x}$$

ЗАДАЧА 16. На оси  $x$  в точке  $x = 0$  покоится частица массой  $m$  и зарядом  $q$ . В момент времени  $t = 0$  включается однородное электрическое поле, параллельное оси  $x$  и меняющееся со временем по закону  $E = E_0 \sin \omega t$ . Найдите зависимость координаты частицы от времени.

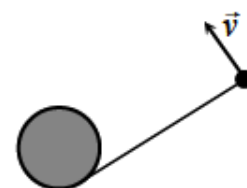
$$\boxed{(qE_0 \cos \omega t - qm) \frac{1}{\omega^2 q} = x}$$

ЗАДАЧА 17. (*Всеросс., 2016, финал, 9*) На частицу массой  $m$ , имеющую скорость  $v$ , начинает действовать постоянная по модулю сила  $F$ , вектор которой за время действия  $\tau$  поворачивается с постоянной угловой скоростью на угол  $180^\circ$  (см. рисунок). Векторы скорости частицы и силы всё время находятся в плоскости рисунка. В начальный момент угол между силой  $F$  и скоростью частицы составлял  $90^\circ$ . Определите модуль и направление конечной скорости частицы  $u$  через время  $\tau$  после начала действия силы  $F$ . Влиянием других сил можно пренебречь.



$$\boxed{\frac{mv}{2F\tau} \mp a = n}$$

ЗАДАЧА 18. (*«Росатом», 2017, 11*) На поверхности стола расположен вертикальный цилиндр радиуса  $R$ , на который намотана длинная невесомая нерастяжимая нить. К концу свободного куска нити, длина которого равна  $l_0$ , привязано тело. Телу сообщают скорость  $v$ , направленную перпендикулярно нити так, что нить начинает наматываться на цилиндр (см. рисунок, вид сверху). Найти время, за которое на цилиндр наматывается одна пятая часть нити. Трение отсутствует.



$$\boxed{\frac{M^2 a^2 \omega^2}{2l_0} = \omega}$$

## 5 Уравнения с разделяющимися переменными

Для начала напомним (на физическом уровне строгости!) понятие *дифференциала*. Пусть тело движется вдоль оси  $x$  и за малый промежуток времени  $dt$  совершает малое перемещение  $dx$ . Интервал  $dt$  полагаем настолько малым, что скорость тела  $v = \dot{x}$  не успевает существенно измениться, так что движение можно считать почти равномерным; тогда  $dx = vdt = \dot{x}dt$ . Выражение  $dx = \dot{x}dt$  и называется *дифференциалом* функции  $x(t)$ . Производная, как легко

видеть, равна отношению дифференциала к приращению аргумента:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}.$$

Аналогично, в абстрактном «математическом» случае дифференциалом функции  $y(x)$  называется выражение

$$dy = y'(x)dx,$$

где  $dx$  — приращение аргумента  $x$ . И снова производная есть отношение дифференциала к приращению аргумента:

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Теперь вернёмся к дифференциальным уравнениям. В предыдущем разделе мы имели дело с простейшими уравнениями вида  $y' = f(x)$  или  $y'' = f(x)$ , которые решались непосредственным интегрированием. Такое счастье, однако, выпадает редко. Гораздо чаще правая часть зависит ещё и от  $y$ , и вот тогда сложность возрастает многократно. Даже для уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{11}$$

никаких общих методов решения не существует — имеются лишь специальные приёмы для отдельных случаев правой части.

Для решения физических задач нам достаточно будет рассмотреть самую простую ситуацию, когда уравнение (11) допускает *разделение переменных*, то есть правая часть  $f(x, y)$  распадается в произведение функции только от  $x$  на функцию только от  $y$ . Для удобства запишем это в виде  $f(x, y) = p(x)/q(y)$ , так что уравнение (11) примет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(x)}{q(y)}, \tag{12}$$

или

$$p(x)dx = q(y)dy. \tag{13}$$

Интегрируем обе части равенства (13):

$$\int p(x)dx = \int q(y)dy,$$

и получим

$$P(x) = Q(y) + C, \tag{14}$$

где  $P(x)$  и  $Q(y)$  — первообразные функций  $p(x)$  и  $q(y)$  соответственно,  $C$  — произвольная постоянная (которая в физических задачах определяется из начальных условий). Равенством (14) решение уравнения (12) по сути заканчивается.

Может возникнуть вопрос: на каком основании мы взяли и «навесили интегралы» на обе части соотношения (13)? Заметим, что равенство (13) означает равенство дифференциалов:  $dP(x) = dQ(y)$ . Но из равенства дифференциалов — бесконечно малых приращений функций  $P$  и  $Q$  — вытекает и равенство их конечных приращений, а это и означает, что сами функции могут отличаться только на константу.

С учётом сказанного ясно, что на обе части равенства (13) можно «навесить» определённые интегралы:

$$\int_{x_0}^x p(x)dx = \int_{y_0}^y q(y)dy,$$

где  $x_0$  и  $y_0$  — начальные значения переменных, известные из условия задачи. В результате получим

$$P(x) - P(x_0) = Q(y) - Q(y_0).$$

Никакой произвольной константы  $C$  уже, разумеется, нет, ибо начальные условия учтены.

Нет принципиальной разницы, как действовать: или навешивать неопределённые интегралы и потом вычислять константу интегрирования, или навешивать определённые интегралы (с пределами интегрирования, ясными из условия) и пользоваться формулой Ньютона — Лейбница. Конечный результат получится одинаковым.

Перед тем, как продемонстрировать метод разделения переменных, сделаем следующее замечание. Вычисляя в задаче 10 неопределённый интеграл от функции  $x^\alpha$ , вы наверняка обратили внимание на ограничение  $\alpha \neq -1$ . И действительно, попытка подставить значение  $\alpha = -1$  в формулу

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

ни к чему хорошему не приводит. Но ведь никто не запрещает нам интегрировать функцию  $x^{-1} = 1/x$ ; чему же равен интеграл  $\int \frac{dx}{x}$ ?

Чтобы ответить на этот вопрос, введём очень важную функцию, с которой вам часто придётся сталкиваться в дальнейшем. Логарифм числа  $x$  по основанию  $e$  называется *натуральным логарифмом* и обозначается  $\ln x$ . Функция  $\ln x$  является обратной для функции  $e^x$ , и её производная вычисляется обычным приёмом:

$$y = \ln x \Rightarrow x = e^y \Rightarrow x' = (e^y)' \Rightarrow 1 = e^y \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Итак,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

откуда

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x > 0).$$

Покажем наконец, как на практике работает метод разделения переменных. Решим дифференциальное уравнение

$$y' = 2xy$$

с начальным условием  $y(0) = 1$ . В процессе решения мы будем делить на  $y$ , поэтому заметим сразу: функция  $y = 0$ , являясь решением данного уравнения, не удовлетворяет начальному условию и нас не интересует, так что деление на  $y$  не приведёт к потере решений.

В соответствии с вышеизложенным, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \Rightarrow \ln y = x^2 + C.$$

Подставляя сюда начальные условия  $x = 0$  и  $y = 1$ , получим  $C = 0$ . Поэтому

$$\ln y = x^2 \Rightarrow y = e^{x^2}.$$

(В цепочке импликаций мы во избежании излишнего занудства сознательно допустили одну небрежность. Вы заметили её?)

ЗАДАЧА 19. (*Всеросс., 2008, финал, 9*) Автомобиль стартует с ускорением  $a_0$ . Из-за сопротивления воздуха ускорение падает по мере увеличения скорости  $v$  по закону  $a \sim (v_0 + v)^{-1}$ , где  $v_0$  — известный коэффициент.

1) Постройте график, изображающий связь между  $a$  и  $v$ , выбрав координаты так, чтобы он являлся отрезком прямой линии.

2) Через какое время  $t_0$  после начала движения автомобиль достигает скорости  $v_0$ ?

3) Определите зависимость скорости  $v$  от времени  $t$  и постройте (качественно) график  $v(t)$ .

$$\left(1 - \frac{0a}{v_0 v_0} + 1\right)^{0a} = a \left(\frac{0v}{0a} = 0\right) \left(\frac{0a}{a} + 1\right)^{\frac{0v}{1}} = \frac{v}{1} \left(1\right)$$

ЗАДАЧА 20. (*«Росатом», 2017, 11*) Тело движется в некоторой среде. Известно, что сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости тела. Известно, что скорость тела уменьшилась в два раза через время  $T$  после начала движения. Через какое время после этого скорость тела уменьшится ещё втрое? Всеми другими силами, кроме силы сопротивления среды, пренебречь.

$$\frac{v}{v_0} = \frac{v_0}{v_0} = 1$$

ЗАДАЧА 21. (*«Росатом», 2014, 11*) Тело движется вдоль оси  $x$  из точки с нулевой координатой так, что проекция его скорости на ось  $x$  зависит от координаты  $x$  по закону  $v_x = \alpha\sqrt{x}$ , где  $\alpha$  — известная постоянная. Через какое время после начала движения тело будет иметь координату  $x_0$ ?

$$\frac{v}{v_0} = \frac{v_0}{v_0} = 1$$

ЗАДАЧА 22. (*«Росатом», 2011, 11*) Имеется цилиндрический сосуд глубиной  $H = 5$  м, полностью заполненный водой. В дне сосуда сделано отверстие, площадь которого в 40 раз меньше площади сечения сосуда. За какое время вся вода вытечет из сосуда? Ускорение свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Указание.* Скорость истечения воды из малого отверстия, расположенного на глубине  $h$ , равна  $\sqrt{2gh}$  (закон Торричелли).

$$\tau = 40 \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

ЗАДАЧА 23. (*«Росатом», 2015, 11*) Цилиндр из твёрдой углекислоты радиуса  $R$  и высотой  $h = R/2$  стоит на одном из своих оснований на плоской поверхности. Углекислота испаряется так, что с единицы площади в единицу времени испаряется масса  $\sigma$ . За какое время вся углекислота испарится? Плотность углекислоты  $\rho$ .

$$\frac{\sigma}{\rho} = \tau$$

Следующие задачи (с пометкой *МФТИ*) взяты из физтеховского задачника для студентов: *Д. А. Заикин, В. А. Овчинкин, Э. В. Прут. Сборник задач по общему курсу физики. Часть 1. 1998*; условия иногда незначительно изменены. Эти задачи предлагаются первокурсникам Физтеха на семинарах уже в сентябре (первые темы занятий — «Динамика материальной точки» и «Статика»); поэтому, разумеется, абитуриент МФТИ должен уметь делать подобные вещи.



Задача 24. (МФТИ) Лодка под парусом развила скорость  $v_0$ . Как будет убывать во времени скорость движения лодки по стоячей воде после спуска паруса, если сопротивление воды движению лодки можно считать пропорциональным квадрату скорости ( $f = \alpha v^2$ )? Как долго будет двигаться лодка? Какой путь она пройдёт до полной остановки? Масса лодки равна  $m$ .

$$\infty \leftarrow \left( \frac{u}{v_0 \alpha v} + 1 \right) \text{ и } \frac{v}{u} = x : \infty \leftarrow \int \frac{v_0 \alpha v + u}{v \alpha u} = a$$

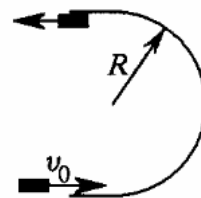
Задача 25. (МФТИ) Те же вопросы, что и в предыдущей задаче, но в предположении, что сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки ( $f = \alpha v$ ).

$$\frac{v}{v_0 \alpha u} = \infty x : \left( \frac{u}{v} - \alpha - 1 \right) \frac{v}{v \alpha u} = x : \frac{u}{v} - \alpha \alpha = a$$

Задача 26. (МФТИ) Тело массой  $m$  брошено вертикально вверх со скоростью  $v_0$ . Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости тела. Найдите зависимость скорости тела от времени.

$$\frac{u}{v} - \alpha \left( \frac{v}{v_0} + \alpha \right) + \frac{v}{v_0} - = a$$

Задача 27. (МФТИ) Брусок скользит по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью  $v_0$  и по касательной попадает в область, ограниченную забором в форме полуокружности (см. рисунок). Определить время, через которое брусок покинет эту область. Радиус забора  $R$ , коэффициент трения скольжения бруска о поверхность забора равен  $\mu$ . Трением бруска о горизонтальную поверхность пренебречь, размеры бруска много меньше  $R$ .



$$(1 - \mu \alpha) \frac{0 \alpha \pi R}{v} = \int$$

Задача 28. (МФТИ) На врытый в землю столб навита верёвка. За один конец верёвки тянут с силой  $F = 10000$  Н. Какую силу надо приложить к другому концу верёвки, чтобы она не соскользнула со столба? Коэффициент трения верёвки о столб  $\mu = 1/\pi$ . Верёвка обвита вокруг столба два раза.

$$H \approx \int \mu^{-2} F = \int$$