Консервативные системы

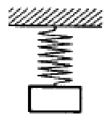
Система тел называется *консервативной*, если для неё выполняется закон сохранения механической энергии: $K + W = \mathrm{const}$, где K — кинетическая энергия системы, W — её потенциальная энергия.

Если в системе имеются упругие пружины и при этом сама система находится во внешнем поле силы тяжести, то W является суммой соответствующих слагаемых вида $kx^2/2$ и mgh. Такая система будет консервативной при условии, что на тела системы не действуют силы сопротивления движению — в частности, силы трения.

Задача 1. (*МФТИ, 1976*) Цирковой гимнаст падает с высоты $H = 1{,}5$ м на туго натянутую упругую предохранительную сетку. Каково будет максимальное провисание гимнаста в сетке, если в случае спокойно лежащего в сетке гимнаста провисание $l = 0{,}1$ м?

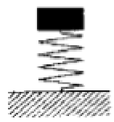
$\boxed{x = l + \sqrt{l^2 + 2lH} = 0{,}66 \text{ м}}$

Задача 2. (*МОШ, 2017, 11*) Груз, подвешенный на лёгкой пружине жёсткостью $k = 200$ Н/м, растягивает её на $x = 2$ см. Какую работу необходимо совершить вертикальной силе, приложенной к грузу, чтобы деформация пружины стала вдвое больше начальной?



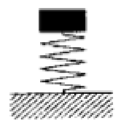
$\boxed{A_1 = 0{,}04 \text{ Дж}, A_2 = 0{,}36 \text{ Дж}}$

Задача 3. (*Всеросс., 2018, МЭ, 11*) На лёгкой вертикально установленной пружине уравновешена гиря. Деформация пружины при этом составляет $x = 6$ см. Чтобы увеличить деформацию пружины вдвое, медленно надавливая на груз в вертикальном направлении, надо совершить работу $A = 1$ Дж. Найдите жёсткость пружины.



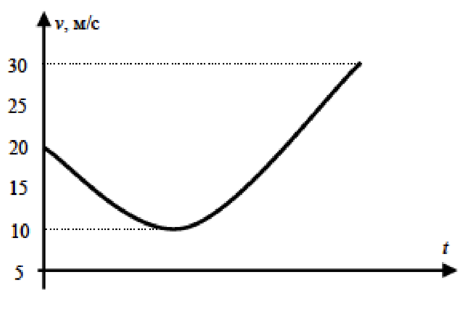
$\boxed{k = \frac{2A}{x^2} \approx 556 \text{ Н/м}}$

Задача 4. (*МОШ, 2018, 11*) На лёгкой пружине уравновешена гиря. Деформация пружины при этом составляет $x = 5$ см. Чтобы увеличить деформацию пружины вдвое, медленно приподнимая груз в вертикальном направлении, надо совершить работу $A = 9$ Дж. Найдите жёсткость пружины.



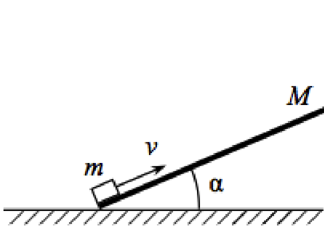
$\boxed{k = \frac{2A}{9x^2} \approx 800 \text{ Н/м}}$

Задача 5. (*МОШ, 2017, 11*) На графике представлена зависимость модуля скорости шарика, брошенного под углом к горизонту с балкона, от момента броска до падения на землю. Определите, под каким углом был брошен шарик и на какой высоте над землёй находится балкон. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. $g = 10$ м/с^2.



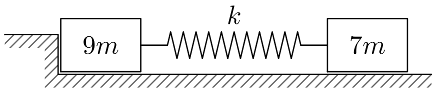
$\boxed{60^\circ;\ 25 \text{ м}}$

Задача 6. (*МОШ, 2018, 11*) Груз массой m толкнули вверх по гладкой доске массой M и длиной l, шарнирно закреплённой в точке O (см. рис.). Доска с горизонтом составляет угол α, расстояние $OA = h < l/2$. Какую скорость v нужно сообщить грузу, чтобы нижний конец доски оторвался от пола?



$v \geqslant \sqrt{2g\left(l - h + \frac{M(l-2h)}{2m}\right)\sin\alpha}$, если $\frac{M}{m} < \frac{2h}{l-2h}$; иначе решения нет

Задача 7. (*«Физтех», 2011*) На гладкой горизонтальной поверхности стола находятся бруски массами $9m$ и $7m$, к которым прикреплена лёгкая упругая пружина жёсткостью k, сжатая на величину x_0 (см. рисунок). Брусок массой $7m$ удерживают неподвижно, другой брусок прижат к упору. Затем брусок массой $7m$ отпускают.



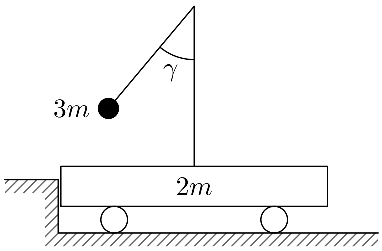
1) Найдите скорость бруска массой $7m$ в момент отрыва другого бруска от упора.

2) Найдите величину деформации пружины при максимальном расстоянии между брусками в процессе их движения после отрыва от упора.

Примечание. Величиной деформации называется модуль разности длин пружины в напряжённом и ненапряжённом состояниях.

1) $v = x_0\sqrt{\frac{k}{7m}}$; 2) $x = \frac{3}{4}x_0$

Задача 8. (*«Физтех», 2011*) На горизонтальной поверхности стола находится платформа с укреплённым на ней штативом. К штативу привязан на нити длиной l небольшой по сравнению с длиной нити шар. Масса платформы со штативом $2m$, масса шара $3m$. Шар отклоняют и удерживают неподвижно так, что нить составляет угол γ ($\cos\gamma = 1/3$) с вертикалью, а платформа прижата к упору (см. рисунок). Затем шар отпускают.



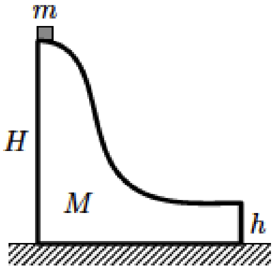
1) Найдите скорость шара в момент отрыва платформы от упора.

2) Найдите максимальный угол отклонения нити от вертикали направо в процессе движения системы после отрыва от упора.

Направления всех движений параллельны одной и той же вертикальной плоскости. Массой колёс платформы пренебречь.

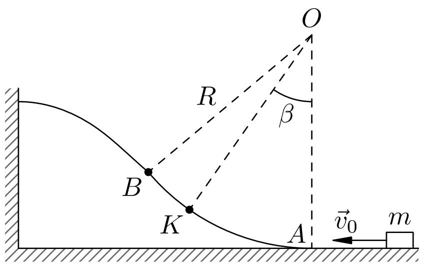
1) $v = \sqrt{\frac{4}{3}gl}$; 2) $\alpha = \arccos\frac{11}{15}$

Задача 9. (*«Курчатов», 2017, 11*) Небольшая шайба массой m скатывается с вершины гладкой горки массой M и высотой H. Горка находится на гладкой поверхности. На какой высоте h над поверхностью должен находиться нижний горизонтальный участок горки для того, чтобы шайба упала на поверхность на максимальном расстоянии от точки поверхности, над которой произошел отрыв? Чему равно это расстояние, если $m : M = 19 : 81$, а высота горки $H = 1$ м?



$h = H/2$; $L_{\max} = H\sqrt{\frac{M}{M+m}} = 0{,}9$ м

Задача 10. (*МФТИ, 2001*) На гладкой горизонтальной поверхности стола покоится горка, упирающаяся в гладкую вертикальную стенку (см. рисунок). Участок AB профиля горки — дуга окружности радиусом R. По направлению к горке движется со скоростью v_0 небольшая по сравнению с размерами горки монета массой m. Монета въезжает на горку, движется по горке без трения, не отрываясь от неё, и достигает точки K, продолжая движение. Радиус OK составляет с вертикалью угол β ($\cos\beta = 5/7$).

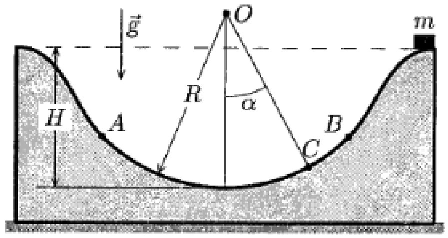


1) Найти скорость монеты в точке K.

2) Найти силу давления горки на стенку в момент прохождения монетой точки K.

1) $v = \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{7}gR}$; 2) $F = \frac{2\sqrt{6}}{7}m\left(\frac{v_0^2}{R} + \frac{g}{7}\right)$

Задача 11. (*МФТИ, 2001*) На горизонтальной поверхности стола покоится чаша с небольшой по сравнению с чашей шайбой массой m (см. рисунок). Нижняя часть AB внутренней поверхности чаши есть часть сферы радиусом R. Глубина чаши $H = 3R/5$, её внутренняя поверхность гладкая. Шайба начинает скользить без начальной скорости и при движении не отрывается от чаши, а чаша остаётся в покое. Шайба достигает точки C, для которой угол между радиусом OC и вертикалью равен α ($\cos\alpha = 4/5$).

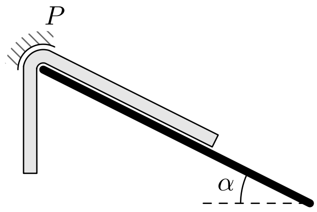


1) Найти скорость шайбы в точке C.

2) Найти силу трения между чашей и столом при прохождении шайбой точки C.

1) $v = 2\sqrt{\frac{gR}{5}}$; 2) $f = mg\left(\frac{2H}{R} + 3\cos\alpha - 2\right)\sin\alpha = \frac{24}{25}mg$

Задача 12. (*МФТИ, 1998*) На доске, наклонённой под углом 30° к горизонту, удерживают в покое однородную гибкую верёвку длиной $l = 40$ см так, что на доске лежит 4/7 длины верёвки, а 3/7 висит вертикально (см. рисунок). Трение верёвки о доску и направляющий желоб P пренебрежимо мало. Верёвку отпускают, и она движется, оставаясь в одной и той же вертикальной плоскости.

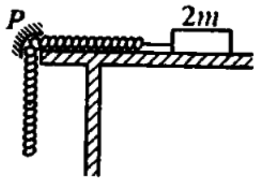


1) Найти ускорение верёвки в начальный момент движения.

2) Найти скорость верёвки в момент, когда соскользнёт с доски и примет вертикальное положение.

1) $a = \frac{g}{7}(3 - 4\sin\alpha) = \frac{g}{7} \approx 1{,}4$ м/с^2; 2) $v = \frac{2}{7}\sqrt{2gl(5 - 2\sin\alpha)} \approx 1{,}6$ м/с

Задача 13. (*МФТИ, 1998*) Однородный гибкий канат массой m и длиной $L = 75$ см прикреплён к бруску масой $2m$, находящемуся на горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). Со стола свешивается половина длины каната. Коэффициент трения бруска о стол $\mu = 0{,}15$. Трением каната о стол и направляющий желоб P пренебречь. Брусок удерживают в покое, а затем отпускают.

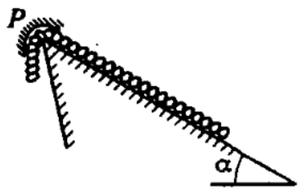


1) Найти ускорение бруска в начале движения.

2) Найти скорость бруска в момент, когда канат соскользнёт со стола.

1) $a = \frac{g}{6}(1 - 4\mu) \approx 0{,}65$ м/с^2; 2) $v = \sqrt{\frac{3-8\mu}{12}gL} \approx 1$ м/с

Задача 14. (*МФТИ, 1998*) Цепочку длиной $l = 20$ см удерживают в покое на клине так, что на наклонённой под углом α ($\sin\alpha = 3/5$) к горизонту поверхности клина лежит 2/3 цепочки, а 1/3 висит (см. рисунок). Трение цепочки о клин и направляющий желоб P пренебрежимо мало. Цепочку отпускают, и она «заползает» на клин, оставаясь в одной и той же вертикальной плоскости.

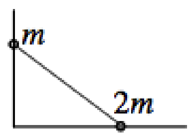


1) Найти ускорение цепочки в начальный момент движения.

2) Найти скорость цепочки в момент, когда она полностью окажется на клине.

1) $a = \frac{g}{3}(2\sin\alpha - 1) \approx 0{,}65$ м/с^2; 2) $v = \frac{1}{3}\sqrt{(5\sin\alpha - 1)gL} \approx 0{,}66$ м/с

Задача 15. (*«Росатом», 2012, 11*) Стержень согнули под углом 90° и расположили так, что одна из сторон получившегося угла вертикальна, а вторая горизонтальна. На каждую сторону угла надели маленькие массивные бусинки с массами m и $2m$ и соединили их невесомым стержнем длиной l. В начальный момент стержень вертикален. Затем от малого толчка он приходит в движение, и бусинки скользят по сторонам угла (см. рисунок). Найти максимальную скорость нижней бусинки в процессе последующего движения.



$v \approx 0{,}45\sqrt{gl}$ (результат приближённого решения уравнения $x^3 + 3x - 2 = 0$)

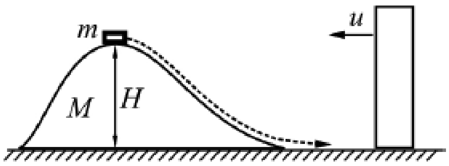
Задача 16. (*МОШ, 2012, 10*) «Водяная ракета» представляет собой полуторалитровую ($V = 1{,}5$ л) бутылку, в которую налито небольшое количество воды массой $m = 200$ г. Ракета несёт полезный груз, укреплённый на её корпусе снаружи. Бутылка заткнута резиновой пробкой, а давление воздуха в ней равно $p = 5$ атмосфер. Оцените, на какую высоту взлетит эта ракета, запущенная вертикально вверх из перевёрнутого положения в результате быстрого выброса воды после удаления пробки. В момент старта ракета была неподвижна. Общая масса взлетевшей ракеты с «боеголовкой» $M = 0{,}5$ кг. Считайте, что давление в бутылке при выбросе воды меняется не сильно. Массой пробки и воздуха в бутылке пренебречь. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

$$\boxed{h = \frac{4pm^2}{5\rho g M(M+m)} \approx 4{,}6 \text{ м}}$$

Задача 17. (*МОШ, 2012, 11*) На лёгкой короткой нити к ветке сосны подвешена гирька массой $m = 1$ кг. К ней привязана другая лёгкая нить с длиной в недеформированном состоянии $L = 1$ м и жёсткостью $k = 1$ кН/м, на конце которой висит ещё одна гирька массой $m = 1$ кг. Система находилась в равновесии до момента, когда верхнюю нить перебил дятел. Гирьки упали на землю одновременно. Каково расстояние H от ветки до земли? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

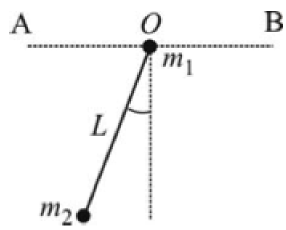
$$\boxed{H = \frac{L}{2}\left(1 + \frac{kL}{2mg}\right) = 25{,}5 \text{ м}}$$

Задача 18. (*МОШ, 2010, 11*) На гладкой горизонтальной плоскости покоится гладкая горка высотой H и массой M, а на её вершине лежит небольшая шайба массой m (см. рисунок). После лёгкого толчка шайба скатывается с горки и скользит перпендикулярно массивной вертикальной стенке, движущейся по плоскости в сторону горки со скоростью u. Испытав абсолютно упругое столкновение со стенкой, шайба скользит в обратном направлении, к горке. С какой минимальной скоростью u должна двигаться стенка, чтобы шайба смогла преодолеть горку?



$$\boxed{u = \frac{m}{M}\sqrt{2gH\frac{M+m}{M}}}$$

Задача 19. (*МОШ, 2013, 10*) Два маленьких шарика 1 и 2, масса каждого из которых m, соединены невесомым стержнем длиной L. Первый шарик шарнирно закреплён в точке O, а второй шарик совершает колебания в вертикальной плоскости. В один из моментов, когда стержень был вертикален, верхний шарик освободили из крепления. Когда угол между стержнем и вертикалью оказался равным $\beta > 0$, шарик 2 приблизился к прямой AB на минимальное расстояние. С какой скоростью двигался шарик 2 в момент освобождения шарика 1? Сопротивлением воздуха пренебречь.

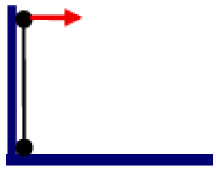


$$\boxed{v = \sqrt{2gL\frac{\beta}{\sin\beta}}}$$

Задача 20. (*МОШ, 2013, 11*) Гантель, состоящая из двух шариков массами m и $2m$ и лёгкого стержня длиной L, поставлена вертикально на гладкую горизонтальную поверхность более массивным шариком вниз. После небольшого толчка нижний шарик гантели начинает двигаться по горизонтальной поверхности, а верхний — двигаться в пространстве. Найдите модули скоростей v_1 и v_2 шариков в зависимости от синуса угла наклона β гантели к горизонту. Ускорение свободного падения равно g.

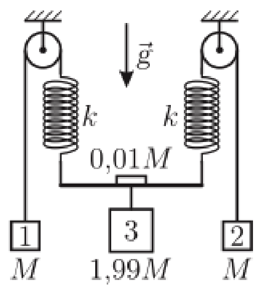
$$\boxed{v_1 = \sqrt{2gL\frac{(1-\sin\beta)(9-5\sin^2\beta)}{9-3\sin^2\beta}},\quad v_2 = \sqrt{2gL\frac{(1-\sin\beta)\sin^2\beta}{9-3\sin^2\beta}}}$$

Задача 21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2015, 10–11*) Гантель из двух массивных одинаковых шариков и лёгкого жёсткого стержня поставлена вертикально в гладкий угол между вертикальной стеной и горизонтальным полом. Верхний шарик подталкивают от стены, сообщая ему скорость v_0 (но не сообщая скорости нижнему шарику). Каким будет угол наклона стержня к вертикали в тот момент, когда сила давления нижнего шарика на стенку будет максимальна? Длина стержня L, ускорение свободного падения g.



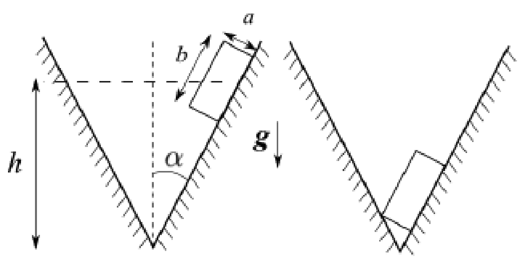
$$\boxed{\varphi = \arccos\left(\frac{v_0^2+2gL+\sqrt{v_0^4+4v_0^2gL+76g^2L^2}}{12gL}\right) \text{ при } v_0 < \sqrt{gL};\ \text{если } v_0 \geqslant \sqrt{gL},\ \text{то } N = 0}$$

Задача 22. (*МОШ, 2008, 10*) Лёгкая доска подвешена за края на двух пружинах жёсткостью k, к другим концам которых прикреплены нерастяжимые нити, перекинутые через неподвижные блоки и соединенные с грузами 1 и 2 массой M каждый (см. рисунок). На середине доски лежит шайба массой $0{,}01M$; к доске снизу под шайбой подвешен груз 3 массой $1{,}99M$. В некоторый момент времени нить, связывающая доску и груз 3, обрывается. На какую максимальную высоту относительно своего первоначального положения подскочит шайба? Нити, блоки и пружины считать невесомыми, трение отсутствует, ускорение свободного падения равно g.



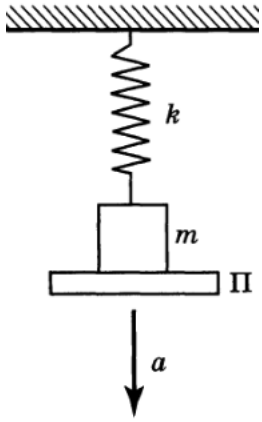
$$\boxed{h \approx 100\frac{Mg}{k}}$$

Задача 23. (*МОШ, 2016, 11*) Между двумя плоскостями, составляющими угол α, на поверхности одной из плоскостей находится брусок длиной b и высотой a. В начальный момент времени центр масс бруска находится на высоте h от линии пересечения плоскостей. Брусок отпускают без начальной скорости, он соскальзывает и касается своим ребром другой плоскости. Найдите скорость бруска в этот момент. Линия пересечения плоскостей параллельна поверхности земли. Трением пренебречь.



$$\boxed{v = \sqrt{2g\left(h - \frac{b}{2}\cos\alpha - \frac{a\cos\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha}\right)}}$$

Задача 24. (*Всеросс., 2000, ОЭ, 9*) Груз массы m прикреплён к потолку лёгкой пружиной жёсткости k. В начальный момент времени груз лежит на подставке П, пружина не растянута, а её ось вертикальна (рис.). На какую максимальную длину L растянется пружина, если подставку начнут опускать с ускорением a? Постройте график зависимости $L(a)$. Попытайтесь подобрать удобные масштабы для переменных L и a.

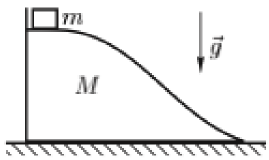


$$L = \begin{cases} \frac{mg}{k}\left(1+\frac{\sqrt{a(2g-a)}}{g}\right), & \text{если } a < g; \\ \frac{2mg}{k}, & \text{если } a \geqslant g \end{cases}$$

Задача 25. (*Всеросс., 2003, ОЭ, 10*) В высоком цилиндрическом сосуде радиуса $R = 4$ см с жидким гелием при температуре, близкой к абсолютному нулю (так что гелий является сверхтекучим и трением можно пренебречь), вертикально плавает ареометр — пластмассовый цилиндр радиуса $r = 3{,}9$ см и массой $m = 500$ г. В результате малых колебаний ареометра уровень гелия в сосуде тоже колеблется, причем амплитуда этих колебаний $x = 1$ мм. Найдите максимальную скорость v уровня поверхности гелия при этих колебаниях. Считайте, что капиллярными эффектами можно пренебречь, а плотность гелия $\rho = 122$ кг/м^3.

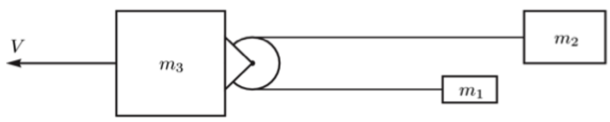
$$v = rx\sqrt{\frac{\pi\rho g}{m}} = 3{,}5 \text{ мм/с}$$

Задача 26. (*Всеросс., 2010, РЭ, 11*) Слева направо по гладкой плоскости скользит тяжёлая горка массы M, на вершине которой покоится лёгкий груз массы m (см. рисунок). Кинетическая энергия K_1 груза в четыре раза меньше его потенциальной энергии П. Груз съезжает с горки без трения. Найдите его кинетическую энергию K_2, когда он окажется на плоскости. Считайте, что $\Pi = 1$ Дж, а $M \gg m$.



$$K_2 = \frac{9}{4}\Pi = 2{,}25 \text{ Дж}$$

Задача 27. (*Всеросс., 2015, РЭ, 11*) На гладкой горизонтальной плоскости находятся три бруска, массы которых равны m_1, m_2 и m_3. На рисунке приведён вид сверху. Упругая лёгкая резинка связывает бруски 1 и 2 и проходит через блок, прикреплённый к бруску 3. Трения в системе нет. Исходно бруски неподвижны, а резинка чуть провисает. Бруску 3 ударом (мгновенно) сообщают скорость v.



1) Найдите скорости брусков в момент, когда растяжение резинки наибольшее.

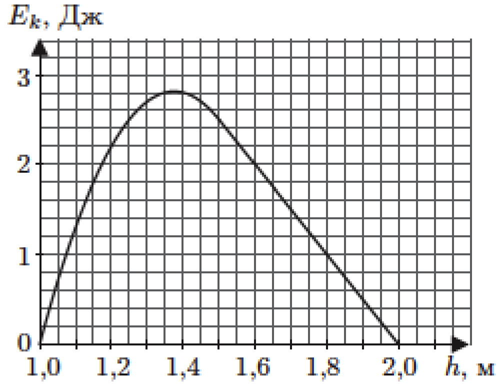
2) Какими будут скорости брусков, когда резинка снова провиснет?

3) В случае, когда $v = 1$ м/с, $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг, $m_3 = 3$ кг найдите скорость третьего бруска, когда растяжение резинки наибольшее.

1) $v_1 = \frac{2m_2m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$, $v_2 = \frac{2m_1m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$, $v_3 = \frac{(m_1+m_2)m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$

2) $v_1 = \frac{4m_2m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$, $v_2 = \frac{4m_1m_3v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$, $v_3 = \frac{(m_1m_3+m_2m_3-4m_1m_2)v}{4m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3}$

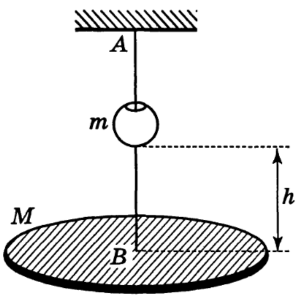
Задача 28. (*Всеросс., 2012, финал, 9*) На горизонтальном столе вертикально закреплена длинная гладкая труба, внутри которой установлена лёгкая пружина. Внутри трубы с высоты $H = 2$ м над столом без начальной скорости начинает падать шарик. Коснувшись верхнего витка пружины, шарик прилипает к нему. На рисунке приведён график зависимости кинетической энергии E_k падающего шарика от его высоты h над поверхностью стола. Определите длину L_0 недеформированной пружины, коэффициент жёсткости пружины k и массу шарика m. Считайте, что потери механической энергии в момент касания шариком верхнего витка пружины не происходит, и что закон Гука справедлив при любых деформациях пружины. Примите $g = 10$ м/с^2.

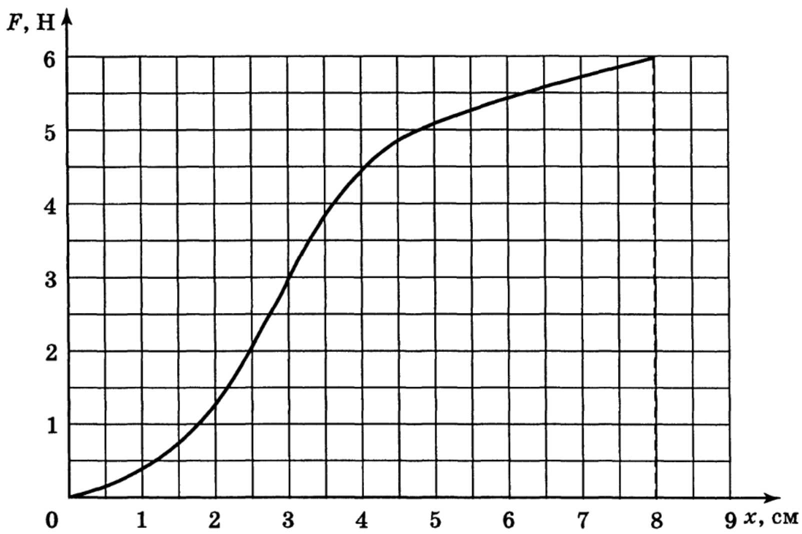


Примечание. Для расчётов используйте выданный Вам отдельно увеличенный рисунок.

$L_0 = 1{,}5$ м; $m = 0{,}5$ кг; $k = 40$ Н/м

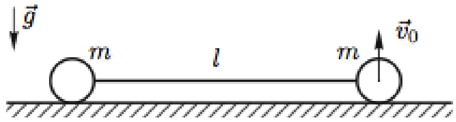
Задача 29. (*Всеросс., 2001, финал, 9*) Горизонтальная платформа массы $M = 300$ г подвешена на резиновом жгуте AB (рис. справа). Жгут проходит сквозь отверстие в грузе массы $m = 100$ г. Система находится в равновесии. Затем груз отпускают без начальной скорости с высоты h относительно платформы. Найдите, при каком минимальном значении h жгут порвётся, если его максимально допустимое удлинение $x_к = 8$ см. Зависимость силы натяжения жгута от его удлинения $F(x)$ приведена на рисунке ниже. Удар груза о платформу считать абсолютно неупругим.





$h = \frac{M+m}{m^2 g}\left(W(x_к) - W(x_0)\right) - \left(\frac{M+m}{m}\right)^2 (x_к - x_0) \approx 20$ см

Задача 30. (*Всеросс., 2013, финал, 10*) Два одинаковых маленьких шарика массы m связаны невесомой и нерастяжимой нитью длины l и покоятся на гладкой горизонтальной плоскости (рис.). Правому шарику сообщается вертикальная скорость v_0. Ускорение свободного падения g.

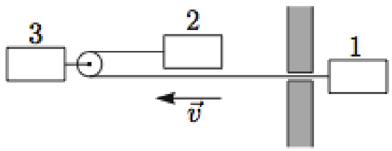


1) Найдите радиус кривизны траектории верхнего шарика в момент, когда нить вертикальна.

2) При каком значении начальной скорости v_0 нижний шарик в этот момент перестанет давить на плоскость?

1) $R = \frac{l}{4}$; 2) $v_0 = \sqrt{3gl}$

Задача 31. (*Всеросс., 2015, финал, 10*) Три одинаковых бруска движутся с одинаковыми скоростями $\vec{v}$. Длинная лёгкая упругая резинка, связывающая первый и второй бруски, проходит сквозь отверстие в массивной стене и через лёгкий блок, прикреплённый к третьему бруску (см. рисунок). В начальный момент времени резинка не растянута. Определите скорости брусков после упругого столкновения первого бруска со стеной в момент времени, когда резинка оказалась



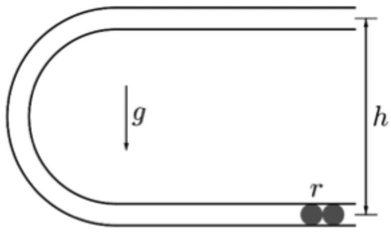
1) максимально растянутой;

2) снова ненатянутой.

Трение в системе не учитывайте. Считайте, что пока резинка не станет снова ненатянутой, груз 2 не сталкивается с блоком, а груз 1 не ударяется о стену.

1) $v_1 = -\frac{2}{3}v$, $v_2 = \frac{4}{3}v$, $v_3 = \frac{1}{3}v$; 2) $v_1 = -\frac{1}{3}v$, $v_2 = \frac{5}{3}v$, $v_3 = -\frac{1}{3}v$

Задача 32. (*Всеросс., 2017, финал, 10*) Двум одинаковым соприкасающимся шарикам радиуса $r = 5$ см сообщают горизонтальную скорость u. Шарики движутся по нижнему колену закреплённой стоящей на боку U-образной трубки (рис.). Расстояние между осями колен $h = 1{,}00$ м, они сопряжены по полуокружности, трения в системе нет, зазор между стенками и шариками мал. При каких значениях скорости u один шарик вылетит из верхнего колена, а другой — из нижнего? Ускорение свободного падения g.



$\sqrt{2g(h-r)} < u < \sqrt{2g(h+r)}$