Центр масс

Пусть две точечные массы m_1 и m_2 расположены на оси X и имеют координаты x_1 и x_2 соответственно. *Центром масс* данной пары точек называется точка оси X с координатой

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Нам важно распространить понятие центра масс на объекты, состоящие из большого числа частиц (например, твёрдое тело, гибкий канат или столбик жидкости). Такой объект мы будем называть *системой* материальных точек.

Итак, пусть имеется система точек с массами m_1, m_2, …, m_N, причём i-я точка имеет координаты (x_i, y_i, z_i). Тогда центр масс данной системы есть точка с координатами

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}\,, \tag{1}$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_N y_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}\,, \tag{2}$$

$$z_c = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots + m_N z_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}\,. \tag{3}$$

Более коротко это определение выглядит в векторной записи: если $\vec{r}_i$ — радиус-вектор i-й точки (то есть вектор, начало которого совпадает с началом координат, а конец расположен в данной точке), то центр масс нашей системы есть точка с радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}\,.$$

Чем интересен центр масс? Продифференцируем формулу (1) по времени:

$$\dot{x}_c = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + \ldots + m_N \dot{x}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}\,;$$

но производная координаты x по времени есть x-проекция скорости, так что

$$v_{cx} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \ldots + m_N v_{Nx}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_{ix}, \tag{4}$$

где $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_N$ есть масса нашей системы. Аналогично, дифференцируя по времени формулы (2) и (3), получим

$$v_{cy} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_{iy}, \tag{5}$$

$$v_{cz} = \frac{1}{M} \sum_i m_i v_{iz}. \tag{6}$$

Формулы (4)–(6) дают выражение для вектора скорости центра масс:

$$\vec{v}_c = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Отсюда

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_c, \tag{7}$$

то есть импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость центра масс. Иными словами, система точек обладает таким же имульсом, какой имела бы одна точка с массой, равной массе системы, и двигающаяся со скоростью центра масс.

Теперь дифференцируем по времени формулы (4)–(6):

$$\dot{v}_{cx} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \dot{v}_{ix}, \quad \dot{v}_{cy} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \dot{v}_{iy}, \quad \dot{v}_{cz} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \dot{v}_{iz},$$

или

$$a_{cx} = \frac{1}{M}\sum_i m_i a_{ix}, \quad a_{cy} = \frac{1}{M}\sum_i m_i a_{iy}, \quad a_{cz} = \frac{1}{M}\sum_i m_i a_{iz}.$$

Последние три формулы дают выражение для вектора ускорения центра масс:

$$\vec{a}_c = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i. \tag{8}$$

Вернёмся к рассмотрению точек нашей системы. На i-ю точку действуют, вообще говоря, силы двух видов.

1. *Внешние силы.* Это силы взаимодействия данной точки с телами, не входящими в систему (например, сила тяжести $m_i\vec{g}$). Равнодействующую внешних сил, приложенных к i-й точке, обозначим $\vec{F}_i$.

2. *Внутренние силы.* Это силы взаимодействия данной точки с остальными точками системы. Силу, действующую на i-ю точку со стороны j-й точки, обозначим $\vec{T}_{ij}$.

Второй закон Ньютона, записанный для i-й точки, будет иметь вид:

$$m\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{T}_{ij} \tag{9}$$

(суммирование ведётся по индексу j, который пробегает значения от 1 до N за исключением значения i — ведь точка не взаимодействует «сама с собой»). Теперь суммируем выражения (9) по всем точкам системы (то есть по всем i от 1 до N):

$$\sum_i m\vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{T}_{ij} \tag{10}$$

Левая часть формулы (10) в силу (8) равна $M\vec{a}_c$. В правой части, во-первых, имеем

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{внеш}}$$

— это равнодействующая внешних сил, приложенных к системе; во-вторых, сумма всех внутренних сил равна нулю:

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{T}_{ij} = \vec{0}$$

(так получается потому, что указанная сумма разбивается на пары слагаемых вида $\vec{T}_{ij} + \vec{T}_{ji}$, а каждая такая пара в сумме даёт нуль по третьему закону Ньютона). В результате получаем:

$$\boxed{M\vec{a}_c = \vec{F}_{\text{внеш}}.}$$

Это — **теорема о движении центра масс**, которая гласит: *произведение массы системы на ускорение центра масс есть равнодействующая внешних сил, приложенных к системе.* Иными словами, центр масс системы движется так же, как двигалась бы точка с массой, равной массе системы, под действием суммы всех внешних сил, действующих на систему (внутренние силы системы не оказывают влияния на движение центра масс). Например, если бросить палку под углом к горизонту, то её центр масс будет двигаться по параболе, а сложное движение палки можно рассматривать как комбинацию двух движений: перемещения центра масс по параболической траектории и вращения палки вокруг центра масс. Мы видим, что понятие центра масс позволяет упростить описание движения системы точек (в частности, твёрдого тела).

Приведём некоторые важные свойства, которыми обладает центр масс. Они следуют из определения или из теоремы о движении центра масс.

- Если тело имеет центр симметрии O, то центр масс тела расположен в точке O. Если тело имеет ось симметрии, то центр масс тела расположен на этой оси.

- Выделим в данной системе точек некоторую подсистему и заменим её одной точкой, которая расположена в центре масс подсистемы и имеет массу, равную массе подсистемы. От такой замены положение центра масс всей системы не изменится.

  Иными словами, систему точек можно разбить на подсистемы, найти центр масс каждой подсистемы, поместить в найденные центры масс точечные массы, равные массам подсистем, а потом искать центр масс всей системы как «центр масс центров масс».

- Напомним, что система называется *замкнутой*, если внешние силы на систему не действуют или уравновешивают друг друга (то есть равнодействующая внешних сил обращается в нуль). Из теоремы о движении центра масс для замкнутой системы получим $\vec{a}_c = \vec{0}$, так что центр масс замкнутой системы покоится или движется равномерно и прямолинейно.

  Это же можно увидеть из формулы (7) — ведь импульс замкнутой системы сохраняется, а потому и $\vec{v}_c = \text{const}$.

  Следовательно, если связать систему отсчёта с центром масс замкнутой системы точек, то такая система отсчёта будет инерциальной.

- Если сумма проекций внешних сил (приложенных к системе) на некоторую ось X равна нулю, то из теоремы о движении центра масс следует, что $a_x = 0$; центр масс системы вдоль оси X либо не движется, либо движется равномерно и прямолинейно.

  Это же можно видеть из формулы (4), поскольку проекция импульса системы на ось X в данном случае сохраняется.

- *Теорема Кёнига.* Пусть имеется система массой M, совершающая некоторое сложное движение. Тогда кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии центра масс $Mv_c^2/2$ и кинетической энергии движения системы относительно центра масс.

Задача 1. (*МОШ, 2016, 9*) С момента написания писателем Григорием Остером новелл про четверых друзей — Мартышку, Слонёнка, Удава и Попугая — прошло уже почти 40 лет. За это время Слонёнок вырос и превратился в Слона, Удав стал ещё длиннее, Попугай состарился и сгорбился, а Мартышка служит теперь чучелом в зоологическом музее. На очередном собрании друзья вспомнили, как они измеряли длину удава, и решили тряхнуть стариной. Удав, лёжа на горизонтальном полу, вычислил расстояние от пола до своего центра масс, и оказалось, что оно равно 10 см. Центр масс Слона оказался на высоте 2 м над полом. Центр масс Удава и Слона вместе взятых находился на высоте 1,7 м. Когда на голову слона на высоте 3,5 м над полом сел Попугай, центр масс всех троих оказался выше ещё на 0,5 мм. Какова масса Удава в Попугаях, если высота Попугая намного меньше толщины Удава?

≈ 568; допустимы ответы в диапазоне от 560 до 570

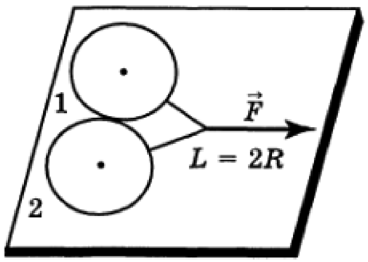
Задача 2. а) Покажите, что центр масс двух точек одинаковой массы находится посередине между точками.

б) Покажите, что центр масс однородного стержня находится в его середине.

Задача 3. Найдите положение центра масс двух точек массами m и $2m$, расположенных на расстоянии l друг от друга.

Между точками на расстоянии $2l/3$ от точки массой m

Задача 4. (*Межреспубл., 1992, финал, 9–10*) На гладком горизонтальном столе лежат, касаясь друг друга, две одинакового размера шайбы *1* и *2*, радиус которых равен R. Шайбы соединены друг с другом с помощью тонкой лёгкой нити (рис.). Длина нити $L = 2R$. Нить начали тянуть в горизонтальном направлении с постоянной силой F. Найдите силу, с которой шайбы будут давить друг на друга, когда их движение установится. Сила F приложена в середине нити. Трение можно считать малым.



Рассмотрите два случая:

1) шайбы имеют одинаковую массу;

2) масса одной шайбы в два раза больше массы другой.

1) $N = \frac{F}{2\sqrt{3}}$; 2) $N = \frac{2F}{3\sqrt{7}}$

Задача 5. Три небольших тела массами m, $3m$ и $4m$ расположены последовательно на одной прямой в точках A_1, A_2 и A_3. Известно, что $A_1A_2 = l$ и $A_2A_3 = 2l$.

1) Найдите положение центра масс этой системы по формуле (1).

2) Убедитесь, что положение центра масс системы не изменится, если найти его как центр масс тела m и тела $7m$, расположенного в центре масс системы тел $3m$ и $4m$.

1) $A_1C = \frac{15}{8}l$

Задача 6. 1) Три одинаковые массы расположены в вершинах треугольника. Где находится центр масс данной системы?

2) Где находится центр масс однородной треугольной пластины?

В точке пересечения медиан

Задача 7. Найдите положение центра масс однородного диска радиуса R, из которого вырезано круглое отверстие радиуса $R/3$. Центр вырезанного отверстия находится на расстоянии $R/2$ от центра диска.

На оси симметрии на расстоянии $R/16$ от центра диска

Задача 8. (*«Физтех», 2012, 10–11*) Внутри однородного шара радиусом $R = 39$ см находится сферическая полость радиусом $r = 13$ см, касающаяся поверхности шара. На каком расстоянии от центра шара находится центр масс шара с полостью? Ответ выразить в сантиметрах.

$x = \frac{R-r}{(R/r)^3-1} = 1$ см

Задача 9. (*МФТИ, 1984*) Составной стержень представляет собой два соосных цилиндра, прижатых друг к другу торцами. Оказалось, что центр масс такого стержня находится в стыковочном сечении. Цилиндры изготовлены из одинакового материала, но площадь сечения одного цилиндра в три раза больше площади сечения другого. Определить отношение длин цилиндров.

$\sqrt{3}$

Задача 10. (*Всеросс., 2014, ШЭ, 10*) Две стороны проволочной рамки, имеющей форму равностороннего треугольника, сделаны из алюминиевой проволоки, а третья — из медной вдвое большего диаметра. Плотность меди считайте в три раза большей плотности алюминия. Определите, на каком расстоянии от середины медной проволоки находится центр тяжести системы, если сторона треугольника равна L.

$x = \frac{\sqrt{3}}{28} L$

Задача 11. Однородный стержень поставлен вертикально на гладкую горизонтальную поверхность и начинает движение из состояния покоя. По какой траектории будет двигаться центр стержня?

По вертикали

Задача 12. (*«Курчатов», 2014, 9–10*) На гладком льду лежит однородная доска длиной $l = 2$ м. К одному из концов доски привязали верёвку и стали медленно тянуть её вверх. Когда угол между доской и поверхностью льда стал равен $60°$, вертикально натянутая верёвка оборвалась. На какое расстояние сместится при падении доски её нижний конец?

На 50 см

Задача 13. Покажите, что потенциальная энергия системы точек в однородном поле силы тяжести равна mgh, где m — масса системы, h — высота её центра масс.

Задача 14. Требуется выкопать колодец глубиной h и площадью поперечного сечения S. Какую работу нужно совершить по подъёму грунта на поверхность земли? Плотность грунта равна ρ, грунт рассыпается тонким слоем по поверхности.

$A = \frac{1}{2}\rho g S h^2$

Задача 15. Тонкий обруч массой m катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v. Найдите кинетическую энергию обруча.

$\boxed{K = mv^2}$

Задача 16. Двойная звезда состоит из двух звёзд-компонентов массами m_1 и m_2, расстояние между которыми постоянно и равно L. Найдите период вращения двойной звезды.

$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L^3}{G(m_1+m_2)}}}$

Задача 17. Шар, движущийся со скоростью v_0, налетает на покоящийся шар такой же массы. Происходит упругий центральный удар. Найдите скорости шаров после удара. (Решите задачу, перейдя в систему отсчёта, связанную с центром масс шаров.)

$\boxed{\text{Первый шар остановится, второй получит скорость } v_0}$

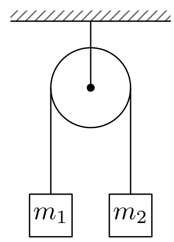
Задача 18. Шар массой m, движущийся со скоростью v_0, налетает на покоящийся шар массой M. Происходит упругий центральный удар. Найдите скорости шаров после удара. (Решите задачу, перейдя в систему отсчёта, связанную с центром масс шаров.)

$\boxed{v_1 = \frac{M-m}{M+m}v_0,\ v_2 = \frac{2m}{M+m}v_0}$

Задача 19. (*«Физтех», 2011, 10*) На гладкой горизонтальной поверхности расположены неподвижный шарик массой $2m$ и движущийся со скоростью 6 м/с шарик массой m. Происходит центральный не вполне упругий удар, так что в тепло переходит только 3/4 энергии, которая перешла бы в тепло при абсолютно неупругом ударе. Найдите скорость (по модулю) налетающего шарика после удара. Ответ выразите в м/с.

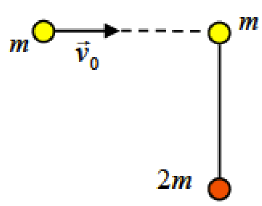
$\boxed{0}$

Задача 20. (*Машина Атвуда*) Грузы массами m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) прикреплены к нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок (см. рисунок). Система предоставлена самой себе. Пользуясь теоремой о движении центра масс, найдите вес системы P (силу давления на ось блока). Массами нити и блока пренебречь. Трение в системе отсутствует.



$\boxed{P = \frac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}}$

Задача 21. (*«Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11*) На гладком горизонтальном столе лежат стальные шарики массами m и $2m$, связанные натянутой невесомой нерастяжимой нитью длины l. Ещё один шарик массы m налетает на систему со скоростью v_0 (перпендикулярно натянутой нити), и происходит абсолютно упругий лобовой удар (см. рисунок). Найти величину силы натяжения нити и ускорение шарика массы $2m$ после удара.



$\boxed{T = \frac{2mv_0^2}{3l};\ a = \frac{v_0^2}{3l}}$

Задача 22. Дальность полёта снаряда, вылетающего из закреплённой пушки под углом к горизонту, равна L. В верхней точке траектории снаряд разорвался на два осколка равной массы, один из которых попал в пушку. На каком расстоянии от пушки приземлился второй осколок?

$\boxed{2L}$

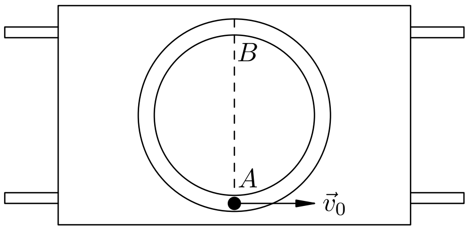
Задача 23. (*МОШ, 2016, 11*) Закреплённая пушка, установленная на горизонтальной поверхности земли, стреляет под углом α к горизонту, причём снаряды вылетают из пушки с начальной скоростью v_0. После первого выстрела снаряд упал на расстоянии L от пушки. Второй выстрел оказался неудачным, и на некоторой высоте снаряд разорвался на два осколка массами m и $2m$. Первый, лёгкий осколок упал на землю на расстоянии $L/2$ от пушки, а второй осколок в момент падения первого осколка находился строго над ним. Определите расстояние s между осколками к моменту падения на землю первого осколка.

$\boxed{s = \frac{3v_0^2 \sin^2\alpha}{4g}}$

Задача 24. (*МОШ, 2007, 11*) Снаряд, летевший вертикально, взорвался в верхней точке своей траектории, распавшись на три осколка массами $m_1 = 2m$, $m_2 = 3m$ и $m_3 = 4m$, которые полетели в разные стороны с одинаковыми начальными скоростями. Через некоторое время после взрыва расстояние между осколками m_1 и m_2 оказалось равным L. Чему было равно в этот момент расстояние между осколками m_1 и m_3, если ни один из осколков ещё не достиг земли? Влиянием воздуха и массой взрывчатого вещества снаряда пренебречь.

$\boxed{x = \frac{2}{3}L}$

Задача 25. (*МФТИ, 1999*) На тележке, которая может двигаться по горизонтальным рельсам прямолинейно и без трения, укреплена в горизонтальной плоскости трубка в форме кольца (см. рисунок). Внутри трубки может двигаться без трения шарик массой m. Масса тележки с трубкой равна M, массой колёс тележки пренебречь. Шарику, при неподвижной тележке, сообщают в точке A скорость v_0, направленную параллельно рельсам.

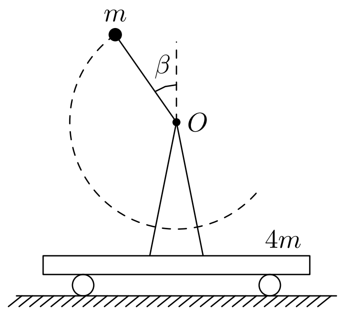


1) Найти скорость тележки при прохождении шариком точки B тележки, диаметрально противоположной точке A.

2) На каком расстоянии от первоначального положения окажется тележка через время t_0, когда шарик совершит несколько оборотов и окажется в точке B тележки?

$\boxed{1)\ v = \frac{2mv_0}{m+M};\ 2)\ s = \frac{m}{m+M} v_0 t_0}$

Задача 26. (*МФТИ, 1999*) Тележка может двигаться прямолинейно, поступательно, без трения по горизонтальной поверхности стола. К тележке прикреплена горизонтальная ось O, перпендикулярная возможному направлению движения тележки (см. рисунок). Вокруг оси O, в плоскости, перпендикулярной ей, может вращаться без трения на стержне длиной L небольшой по размерам шарик массой m. Масса тележки, оси O и её крепления равна $4m$. Массами стержня и колёс тележки пренебречь. Вначале тележка покоилась, а стержень удерживали под углом $\beta = 30°$ к вертикали. Затем стержень отпустили.

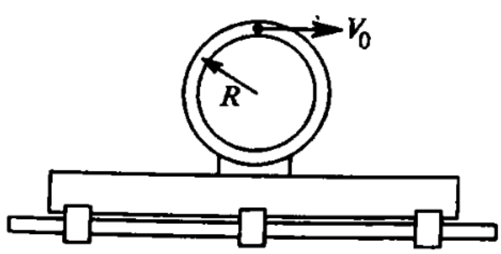


1) Найти скорость тележки при прохождении шариком нижней точки своей траектории.

2) Найти амплитуду колебаний тележки, то есть половину расстояния между наиболее удалёнными друг от друга положениями тележки.

1) $v = \sqrt{\frac{gL}{20}\left(2+\sqrt{3}\right)}$; 2) $A = \frac{m}{m+4m}L = \frac{L}{5}$

Задача 27. (*МФТИ, 1999*) Брусок может двигаться поступательно без трения по прямолинейным горизонтальным салазкам, не отрываясь от них. На бруске укреплён в вертикальной плоскости, параллельной салазкам, желоб радиусом R, по которому может скользить без трения небольшой по размерам шарик массой m (см. рисунок). Масса бруска с желобом $6m$. Вначале брусок покоился. Шарику в верхней точке желоба сообщили горизонтальную скорость v_0.

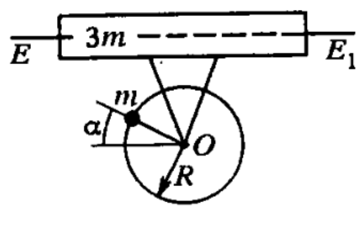


1) Найти скорость бруска при прохождении шариком нижней точки желоба.

2) На каком расстоянии от первоначального положения окажется брусок через время t_0, когда шарик совершит несколько оборотов и окажется в нижней точке желоба?

1) $v = \frac{3v_0+\sqrt{9v_0^2+42gR}}{21}$; 2) $L = \frac{1}{7}v_0t_0$

Задача 28. (*МФТИ, 1999*) Муфта может двигаться поступательно без трения вдоль горизонтальной направляющей EE_1 (см. рисунок). К муфте перпендикулярно EE_1 прикреплена горизонтальная ось O, вокруг которой может вращаться без трения обруч радиусом R с закреплённым на нём небольшим по размерам грузом массой m. Масса муфты, оси O и её крепления равна $3m$. Массой обруча пренебречь. Вначале муфта неподвижна, и обруч удерживают в положении, когда радиус Om составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Затем обруч отпускают.

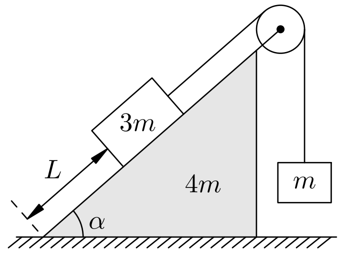


1) Найти скорость муфты при прохождении грузом нижней точки своей траектории.

2) Найти амплитуду колебаний муфты, т. е. половину расстояния между наиболее удалёнными друг от друга положениями муфты.

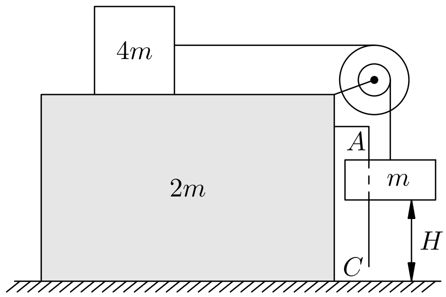
1) $v = \sqrt{\frac{1}{6}gR(1+\sin\alpha)} = \frac{1}{2}\sqrt{gR}$; 2) $A = \frac{m}{m+3m}R = \frac{R}{4}$

Задача 29. (*МФТИ, 2004*) Бруски с массами m и $3m$ связаны лёгкой нитью, перекинутой через блок, укреплённый на вершине клина с углом наклона к горизонту α ($\cos\alpha = 7/9$) и массой $4m$ (см. рисунок). Клин находится на гладкой горизонтальной поверхности стола. Брусок с массой $3m$ удерживают неподвижно на растоянии $L = 24$ см от края клина, а затем отпускают. В результате бруски и клин движутся поступательно, их скорости лежат в одной и той же вертикальной плоскости. На какое расстояние сместится клин к моменту удара бруска массой $3m$ о стол? К моменту удара другой брусок ещё не достигает блока. Массой блока пренебречь.



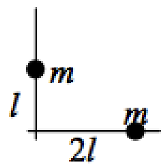
$s = \frac{3}{8}L\cos\alpha = 7$ см (вправо)

Задача 30. (*МФТИ, 2004*) Брусок в форме прямоугольного параллелепипеда находится на гладкой горизонтальной поверхности стола. На бруске укреплены ступенчатый блок с радиусами шкивов r и $R = 3r$ и вертикальная штанга AC (см. рисунок). На шкивы намотаны лёгкие нити, прикреплённые к грузам с массами m и $4m$. Масса бруска равна $2m$. Груз с массой m может скользить вдоль штанги AC. Вначале груз с массой $4m$ удерживали в покое. При этом груз с массой m находился на расстоянии $H = 14$ см от стола. Затем грузы отпустили. Брусок и грузы стали двигаться поступательно, их скорости оказались в одной и той же вертикальной плоскости. На какое расстояние сместится брусок к моменту удара груза с массой m о стол? При ударе другой груз не достигает блока. Масами блока и штанги пренебречь.



$s = \frac{4}{7}\frac{R}{r}H = 24$ см (влево)

Задача 31. (*«Росатом», 2014, 11*) Два точечных тела с массами m могут скользить по жёстким спицам, расположенным под прямым углом друг к другу. Тела притягиваются с силой F, величина которой не зависит от расстояния между ними. В начальный момент тела, которые удерживали на расстояниях l и $2l$ от точки пересечения спиц, отпускают. Какое из них первым окажется в точке пересечения спиц? Найти время его движения до этой точки. Силой тяжести и трением пренебречь.



Шары окажутся в точке пересечения спиц одновременно спустя время $\tau = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}ml}{F}}$

Задача 32. (*Всеросс., 2017, финал, 11*) Пружину «слинки» удерживают за верхний виток так, что её нижний виток находится на высоте $h = 1$ м над уровнем пола, а длина самой пружины, растянутой силой собственного веса, равна $l = 1{,}5$ м. Пружину отпускают. Через какое время τ она упадёт на пол? В нерастянутом состоянии витки пружины плотно прилегают друг к другу, не оказывая при этом давления друг на друга, а длина пружины составляет $l_0 = 6$ см. Витки тонкие. При схлопывании пружины витки между собой соударяются неупруго, и к моменту падения она успевает схлопнуться. Ответ дать с точностью 0,02 с.

$\tau = \sqrt{\frac{2}{g}\left(H + \frac{l}{3}\right)} = 0{,}55$ с