

## Теплоёмкость газа

Напомним, что *теплоёмкостью* тела называется отношение количества теплоты  $Q$ , которое нужно сообщить данному телу для повышения его температуры на  $\Delta T$ , к величине  $\Delta T$ :

$$C = \frac{Q}{\Delta T}.$$

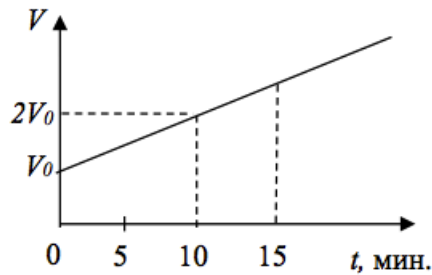
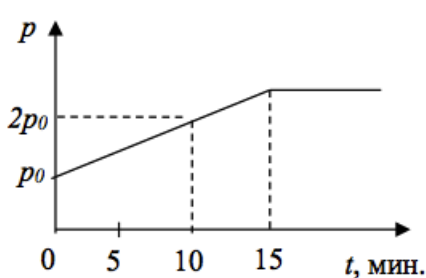
Вам известно понятие удельной теплоёмкости вещества — это теплоёмкость, отнесённая к единице массы тела:  $c = Q/(m\Delta T)$ . В случае газов чаще используется *молярная* теплоёмкость, то есть теплоёмкость одного моля газа:

$$C_\mu = \frac{Q}{\nu\Delta T}.$$

У жидкостей и твёрдых тел удельная теплоёмкость есть табличная характеристика вещества. Для газов это не так. Удельная (или молярная) теплоёмкость газа зависит от процесса, совершаемого над данной порцией газа (существуют даже процессы, в которых теплоёмкость газа не остаётся постоянной; такие процессы, правда, в школьной программе не рассматриваются).

**ЗАДАЧА 1.** (*Формула Майера*) Пусть  $C_p$  — молярная теплоёмкость идеального газа в изобарическом процессе,  $C_V$  — молярная теплоёмкость этого же газа в изохорическом процессе. Докажите, что  $C_p - C_V = R$ , где  $R$  — газовая постоянная.

**ЗАДАЧА 2.** (*Всеросс., 2017, ШЭ, 11*) На графиках приведены зависимости от времени  $t$  давления  $p$  и объёма  $V$  одного моля одноатомного идеального газа. Определите, как со временем изменялась теплоёмкость данного количества газа. Постройте график зависимости этой теплоёмкости от времени.



$$C = 2R \text{ при } t \geq 15 \text{ мин; затем } C = \frac{5}{2}R$$

**ЗАДАЧА 3.** (*МОШ, 2018, 11*) Идеальному газу, находящемуся в вертикальном цилиндре под невесомым подвижным поршнем, сообщают количество теплоты  $Q = 300$  Дж. Внутренняя энергия газа при этом увеличивается на  $\Delta U = 200$  Дж. Найдите изменение объёма газа и определите его молярную теплоёмкость при постоянном объёме. Внешнее атмосферное давление равно  $p_A = 100$  кПа.

$$C_V = 2R$$

ЗАДАЧА 4. (*Всеросс., 2018, МЭ, 11*) В некотором процессе над газом совершена работа  $A' = 100$  Дж, при этом его внутренняя энергия возросла на  $\Delta U = 80$  Дж, а температура увеличилась на  $\Delta t = 10^\circ\text{C}$ . Найдите среднюю теплоёмкость газа в этом процессе.

$$\kappa/\text{жГ} \tau = \frac{\Delta U}{V \Delta T} = 0$$

ЗАДАЧА 5. (*«Физтех», 2009*) Моль гелия совершает работу  $A = 5,5$  кДж в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа постоянна и равна  $c = 18$  Дж/(моль·К). Во сколько раз изменилось давление гелия, если его объём увеличился в 4 раза? Начальная температура газа  $T_1 = 142$  К.

$$\tau \approx \frac{18(4^{\frac{1}{4}} - 1)}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ЗАДАЧА 6. (*МФТИ, 2006*) Астронавты, исследуя воздух открытой ими планеты, нагрели порцию воздуха массой  $m = 200$  г на  $\Delta T = 60^\circ\text{C}$  один раз при постоянном давлении, а другой раз — при постоянном объёме. Оказалось, что при постоянном давлении требуется подвести на  $\Delta Q = 1$  кДж больше тепла, чем при постоянном объёме. Найдите среднюю молярную массу воздуха, считая его идеальным газом.

$$\text{г/мол} / 200 = \frac{\Delta Q}{\Delta T m} = \mu$$

ЗАДАЧА 7. (*МФТИ, 1995*) В вакуумной теплоизолированной камере находятся два масляных пузыря одинакового размера, один из которых наполнен гелием, а другой — водородом, до давления  $p_0$  каждый. Найти отношение давления  $p$ , установившегося в камере после того, как пузыри лопнули, к начальному давлению газа в пузырях. Отношение температуры гелия  $T_1$  к температуре водорода  $T_2$  составляет  $T_1/T_2 = 0,6$ . Молярная теплоёмкость гелия при постоянном объёме  $C_{V_1} = \frac{3}{2}R$ , водорода —  $C_{V_2} = \frac{5}{2}R$ , где  $R$  — газовая постоянная. Объём пузыря в 160 раз меньше объёма камеры. Изменением поверхностной энергии плёнок при разрыве пузырей пренебречь.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\tau_{V_1} \tau_{V_2} + \tau_{V_1}}{\tau_{V_1} + \tau_{V_2}} \left( \frac{\tau_{V_1}}{\tau_{V_2}} + 1 \right) \frac{A}{0,1} = \frac{0,1}{A}$$

ЗАДАЧА 8. (*МФТИ, 1996*) Гелий из состояния с температурой  $T_1 = 200$  К расширяется в процессе  $pV^2 = \text{const}$  ( $p$  — давление,  $V$  — объём газа) с постоянной теплоёмкостью  $C$ . От газа отвели количество теплоты  $Q = 415$  Дж, и конечный объём газа стал вдвое больше начального.

- 1) Определить конечную температуру гелия.
- 2) Определить теплоёмкость  $C$ .

$$\kappa/\text{жГ} \tau = \frac{1}{2} = 0 \quad (\tau; \kappa \text{ Г} = \frac{\tau}{T} = \tau_L \text{ Г})$$

ЗАДАЧА 9. (*МФТИ, 1996*) Гелий из состояния с температурой  $T_1 = 200$  К расширяется в процессе  $p^2V = \text{const}$  ( $p$  — давление,  $V$  — объём газа) с постоянной теплоёмкостью  $C$ . К газу подвели количество теплоты  $Q = 2190$  Дж. Конечное давление газа вдвое меньше начального.

- 1) Определить конечную температуру гелия.
- 2) Определить теплоёмкость  $C$ .

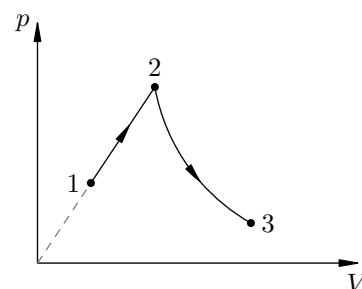
$$\kappa/\text{жГ} \tau = 29,1 = 0 \quad (\tau; \kappa \text{ Г} = \tau_L \text{ Г})$$

ЗАДАЧА 10. (МФТИ, 1996) Гелий в количестве  $\nu = 4$  моля сжимают в процессе с постоянной теплоёмкостью  $C$ . От газа отвели количество теплоты, равное изменению его внутренней энергии, и температура газа увеличилась на  $\Delta T = 100$  К.

- 1) Чему равна работа, совершённая газом?
- 2) Определить теплоёмкость  $C$ .

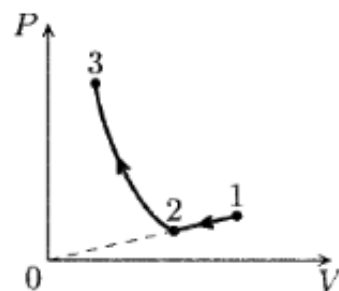
$$\boxed{A = -3\nu R \Delta T = -1200 \text{ Дж}; C = \frac{2}{3} \nu R \approx 104 \text{ Дж/К}}$$

ЗАДАЧА 11. (МФТИ, 2002) Моль гелия, расширяясь в процессе 1–2 (см. рисунок), где его давление  $p$  меняется прямо пропорционально объёму  $V$ , совершает работу  $A$ . Из состояния 2 гелий расширяется в процессе 2–3, в котором его теплоёмкость  $C$  остаётся постоянной и равной  $C = R/2$  ( $R$  — газовая постоянная). Какую работу  $A_{23}$  совершит гелий в процессе 2–3, если его температура в состоянии 3 равна температуре в состоянии 1?



$$\boxed{A_{23} = 2A}$$

ЗАДАЧА 12. (МФТИ, 2002) Моль гелия сжимают из начального состояния 1 в конечное состояние 3 в двух процессах (см. рисунок). Сначала сжатие идёт в процессе 1–2, когда давление гелия  $p$  прямо пропорционально его объёму  $V$ . Затем из состояния 2 газ сжимают в процессе 2–3 с постоянной теплоёмкостью так, что тепло подводится к газу. В конечном состоянии 3 температура гелия равна его температуре в состоянии 1. Найти теплоёмкость газа в процессе 2–3, если в процессе сжатия 1–2 над газом совершена работа  $A$  ( $A > 0$ ), а в процессе 2–3 над газом совершена работа  $2A$ .



$$\boxed{C = R/2}$$

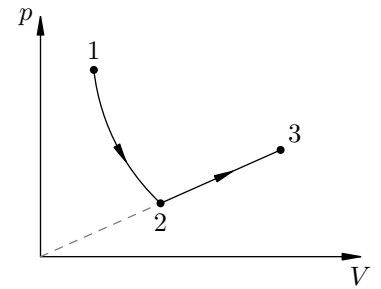
ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 2006) С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс 1–2–3–1, состоящий из адиабатического расширения 1–2, расширения в процессе 2–3, в котором теплоёмкость газа оставалась постоянной, и сжатия в процессе 3–1 с линейной зависимостью давления от объёма.  $T_1 = 2T_2 = T_3$ ,  $V_3 = 4V_1$ . Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 2–3, если работа, совершённая над газом в цикле, составляет  $7/15$  от работы, совершённой над газом в процессе 3–1.

$$\boxed{c = 2R}$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 2006) С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс 1–2–3–1, состоящий из расширения в процессе 1–2, в котором молярная теплоёмкость газа постоянна и равна  $2R$ , адиабатического расширения 2–3 и сжатия в процессе 3–1 с линейной зависимостью давления от объёма.  $T_1 = T_2/2 = T_3$ ,  $V_3 = 4V_1$ . Найдите работу, совершённую газом в процессе 1–2–3, если работа, совершённая газом в цикле, составила 100 Дж.

$$\boxed{A_{123} = 1600 \text{ Дж}}$$

ЗАДАЧА 15. («Физтех», 2010) Газообразный гелий из начального состояния 1 расширяется в процессе 1–2 с постоянной теплоёмкостью, совершая в нём работу  $A_{12} = 400$  Дж. Затем к газу подводится количество теплоты  $Q_{23} = 400$  Дж в процессе 2–3, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рисунок). Температуры в состояниях 1 и 3 равны.

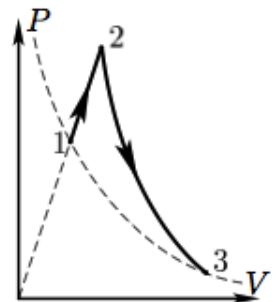


1) Найдите количество теплоты, подведённое к газу в процессе 1–2.

2) Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 1–2, выразив её через  $R$ .

$$Q_{23} = 400 \text{ Дж} = \nu C_{23} \Delta T = \nu C_{23} \left( \frac{3}{2} R \frac{V_3}{V_2} - \frac{3}{2} R \right) \quad (1)$$

ЗАДАЧА 16. («Физтех», 2010) Газообразный гелий из начального состояния 1 расширяется в процессе 1–2, в котором давление прямо пропорционально объёму, совершая в нём работу  $A_{12} = 200$  Дж. Затем газ расширяется в процессе 2–3 с постоянной теплоёмкостью, совершая работу  $A_{23} = 1000$  Дж. Температуры в состояниях 1 и 3 равны (см. рисунок).



1) Найдите количество теплоты, подведённое к газу в процессе 2–3.

2) Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 2–3, выразив её через  $R$ .

$$Q_{23} = 1000 \text{ Дж} = \nu C_{23} \Delta T = \nu C_{23} \left( \frac{3}{2} R \frac{V_3}{V_2} - \frac{3}{2} R \right) \quad (1)$$

ЗАДАЧА 17. («Физтех», 2016, 10) Один моль гелия находится при температуре  $T = 273$  К. Далее газ расширяется так, что объём увеличивается на 3%, а давление уменьшается на 2%. Изменения параметров газа считать малыми.

- 1) Вычислите приращение  $\Delta T$  температуры газа.
- 2) Какую работу  $\Delta A$  совершил газ в процессе расширения?
- 3) Найдите молярную теплоёмкость  $C$  газа в этом процессе.

$$\Delta A = \int p dV = \nu R T \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R T \ln \left( 1 + \frac{\Delta V}{V} \right) \approx \nu R T \frac{\Delta V}{V} = \nu R T \Delta \left( \frac{V}{V} \right) \quad (1)$$

ЗАДАЧА 18. («Физтех», 2016, 10–11) Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры  $T_0$  в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа зависит от температуры  $T$  по закону

$$C = R \frac{T}{T_0}.$$

- 1) Найти температуру  $T_1$ , при нагревании до которой газ совершил работу, равную нулю.
- 2) Найти температуру  $T_2$ , при достижении которой газ занимал минимальный объём в процессе нагревания.

$$Q_L = \int_{T_0}^{T_1} C dT = \int_{T_0}^{T_1} R \frac{T}{T_0} dT = \frac{R}{T_0} \left( \frac{T_1^2}{2} - \frac{T_0^2}{2} \right) \quad (1)$$

ЗАДАЧА 19. («Физтех», 2016, 10–11) Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры  $T_0$  в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа зависит от температуры  $T$  по закону

$$C = \alpha R \frac{T}{T_0},$$

где  $\alpha$  — неизвестная численная константа.

1) Найти  $\alpha$ , если известно, что при нагревании до температуры  $T_1 = 5T_0/4$  газ совершил работу, равную нулю.

2) Найти температуру  $T_2$ , при достижении которой газ занимал минимальный объём в процессе нагревания.

$$\int_{T_0}^{T_1} \frac{C}{T^2} dT = \nu (1 - \frac{T_1}{T_0})$$

ЗАДАЧА 20. (Всеросс., 2000, ОЭ, 10) В некотором процессе молярная теплоёмкость газообразного гелия возрастает прямо пропорционально температуре  $T$ :

$$C(T) = \frac{3RT}{4T_1},$$

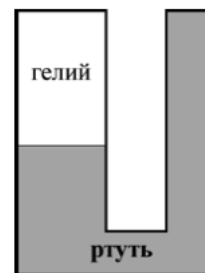
где  $T_1$  — начальная температура газа,  $R$  — молярная газовая постоянная. Какую работу  $A$  совершат  $\nu$  молей газа к тому моменту, когда его объём станет минимальным в указанном выше процессе?

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{C}{T^2} dT = \nu$$

ЗАДАЧА 21. (МОШ, 2016, 11) Герметичный сосуд заполнен двухатомным идеальным газом. После значительного повышения температуры часть молекул диссоциировала на атомы, при этом удельная теплоёмкость всего газа возросла на 10%. Какая часть молекул диссоциировала? Теплоёмкость одного моля двухатомного идеального газа при неизменном объёме  $C_V = 2,5R$ .

$$\frac{C_V}{\nu} = 2,5R$$

ЗАДАЧА 22. (МОШ, 2014, 11) На рисунке изображены два вертикальных сообщающихся цилиндрических сосуда. Верх левого сосуда герметично запаян, и этот сосуд частично заполнен гелием. Правый сосуд до краёв наполнен ртутью так, что часть ртути находится в левом сосуде, и гелий заперт ею. Система помещена в вакуум. Гелию начинают медленно сообщать теплоту и продолжают нагревание до тех пор, пока ртуть остается в левом сосуде. Определите удельную теплоёмкость гелия в этом процессе.

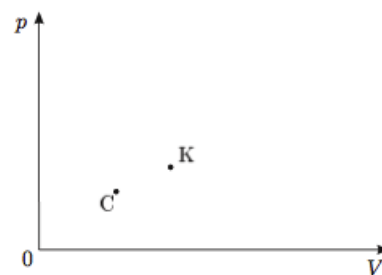


$$\int_{T_0}^{T_1} \frac{C}{T^2} dT = \nu$$

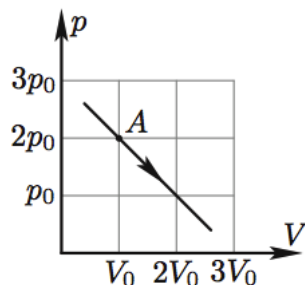
ЗАДАЧА 23. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Один моль гелия, занимавший объём  $V = 10$  л, нагрели в процессе, в котором его молярная теплоёмкость равнялась  $C_\mu = 2,3R$  ( $R = 8,31$  Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная). При этом давление гелия увеличилось на 0,2%. На сколько см<sup>3</sup> изменился объём гелия в этом процессе?

$$\int_{T_0}^{T_1} \frac{C}{T^2} dT = \nu$$

ЗАДАЧА 24. (Всеросс., 2013, РЭ, 11) Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись с  $pV$ -диаграммой, на которой был изображён циклический процесс в виде прямоугольного треугольника  $ACB$ . При этом угол  $C$  был прямым, а в точке  $K$ , лежащей на середине стороны  $AB$ , теплоёмкость многоатомного газа ( $\text{CH}_4$ ) обращалась в нуль. Газ можно считать идеальным. От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны только координатные оси и точки  $C$  и  $K$  (см. рисунок). С помощью циркуля и линейки без делений восстановите положение треугольника  $ACB$ . Известно, что в точке  $A$  объём был меньше, чем в точке  $B$ .

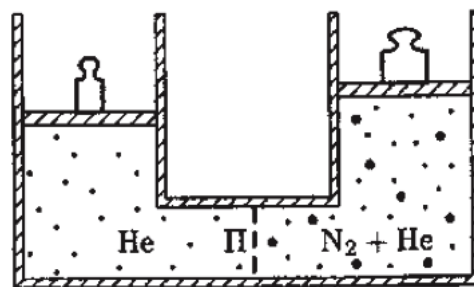


ЗАДАЧА 25. (Всеросс., 2004, финал, 10) С одним молем идеального одноатомного газа проводят процесс (рис.). Найдите теплоёмкость газа в точке  $A$ . В какой точке процесса теплоёмкость газа максимальна?



$$C_A = \frac{5}{2}R; C_V = \frac{3}{2}R; C_P = \frac{5}{2}R; C_{\infty} = \infty \text{ в точке } (3V_0, \frac{2}{3}p_0)$$

ЗАДАЧА 26. (Всеросс., 2005, финал, 10) В сосуде находятся гелий  $\text{He}$  и азот  $\text{N}_2$  в количестве  $\nu_1$  и  $\nu_2$  соответственно. Сосуд разделён на две части пористой перегородкой  $\Pi$  (рис.), которая свободно пропускает гелий и не пропускает азот, причём изначально азот был только в правой части. Пренебрегая теплоёмкостью стенок сосуда и поршней, найдите теплоёмкость системы при нагревании в следующих условиях:



- 1) при закреплённых поршнях;
- 2) при свободных поршнях, создающих постоянные давления;
- 3) при свободном левом поршне, создающем постоянное давление, и закреплённом правом поршне.

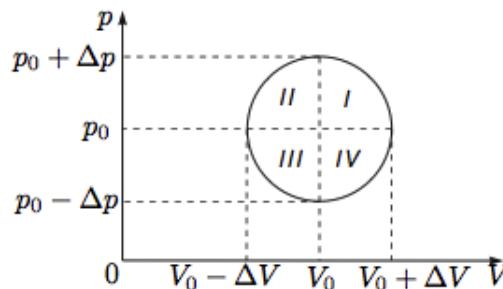
Универсальная газовая постоянная  $R$  известна.

$$C_1 = \frac{5}{2}R; C_2 = \frac{5}{2}R; C_3 = \frac{5}{2}R; C_4 = \frac{5}{2}R; C_5 = \frac{5}{2}R; C_6 = \frac{5}{2}R; C_7 = \frac{5}{2}R; C_8 = \frac{5}{2}R; C_9 = \frac{5}{2}R; C_{10} = \frac{5}{2}R$$

ЗАДАЧА 27. (Всеросс., 2014, финал, 10) При охлаждении одного моля гелия от начальной температуры  $T_0$  до некоторой конечной температуры  $T_x$  в процессе с теплоёмкостью  $C$ , прямо пропорциональной температуре  $T$ , газ совершил работу, равную нулю. В самом начале процесса охлаждения давление газа изменялось прямо пропорционально его объёму. Найдите величину положительной работы газа в данном процессе и отношение  $T_x/T_0$ .

$$\frac{z}{1} = \frac{0L}{xT}, \text{ 'LH} \frac{91}{1} = +V$$

ЗАДАЧА 28. (Всеросс., 2016, финал, 11) Над молем идеального многоатомного газа проводят круговой процесс, который, будучи изображённым на  $p, V$ -диаграмме, при некотором масштабе имеет вид окружности. Центр окружности имеет координаты  $(p_0, V_0)$ , диаметр вдоль оси давлений равен  $2\Delta p$ , а диаметр вдоль оси объёмов —  $2\Delta V$ .



1) Найдите все пары диаметрально противоположных точек окружности, в которых теплоёмкости одинаковы. Вычислите эти теплоёмкости.

2) Сравните теплоёмкости двух произвольных диаметрально противоположных точек, лежащих во 2 и 4 квадрантах окружности (см. рисунок); другими словами, определите, в какой из этих точек теплоёмкость больше и почему.

*Примечание.* Считайте, что теплоёмкость газа при постоянном объёме не зависит от  $T$ .

$$v_C < z_C \left( z : z \left( \frac{\Delta \nabla^{0d}}{d \nabla^{0d}} \right)^{-1} + \Lambda_C = C \right)$$