

Теплоёмкость газа

Напомним, что *теплоёмкостью* тела называется отношение количества теплоты Q , которое нужно сообщить данному телу для повышения его температуры на ΔT , к величине ΔT :

$$C = \frac{Q}{\Delta T}.$$

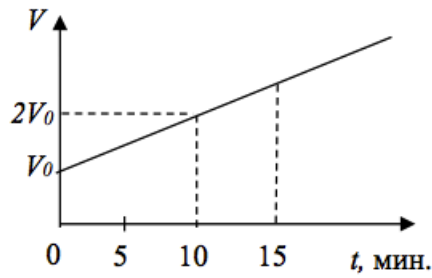
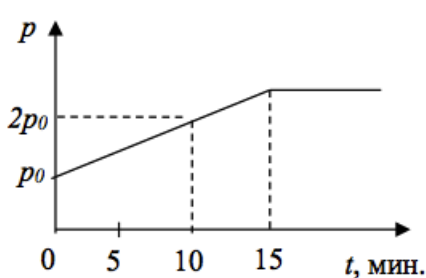
Вам известно понятие удельной теплоёмкости вещества — это теплоёмкость, отнесённая к единице массы тела: $c = Q/(m\Delta T)$. В случае газов чаще используется *молярная* теплоёмкость, то есть теплоёмкость одного моля газа:

$$C_\mu = \frac{Q}{\nu\Delta T}.$$

У жидкостей и твёрдых тел удельная теплоёмкость есть табличная характеристика вещества. Для газов это не так. Удельная (или молярная) теплоёмкость газа зависит от процесса, совершаемого над данной порцией газа (существуют даже процессы, в которых теплоёмкость газа не остаётся постоянной; такие процессы, правда, в школьной программе не рассматриваются).

ЗАДАЧА 1. (*Формула Майера*) Пусть C_p — молярная теплоёмкость идеального газа в изобарическом процессе, C_V — молярная теплоёмкость этого же газа в изохорическом процессе. Докажите, что $C_p - C_V = R$, где R — газовая постоянная.

ЗАДАЧА 2. (*Всеросс., 2017, I этап, 11*) На графиках приведены зависимости от времени t давления p и объёма V одного моля одноатомного идеального газа. Определите, как со временем изменялась теплоёмкость данного количества газа. Постройте график зависимости этой теплоёмкости от времени.



$$C = 2R \text{ при } t \leq 10 \text{ мин; затем } C = \frac{5}{2}R$$

ЗАДАЧА 3. («Физтех», 2009) Моль гелия совершает работу $A = 5,5$ кДж в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа постоянна и равна $c = 18$ Дж/(моль·К). Во сколько раз изменилось давление гелия, если его объём увеличился в 4 раза? Начальная температура газа $T_1 = 142$ К.

$$2 \approx \frac{14(18-6R)^2}{V} + \frac{1}{1} = \frac{14}{2}$$

ЗАДАЧА 4. (МФТИ, 2006) Астронавты, исследуя воздух открытой ими планеты, нагрели порцию воздуха массой $m = 200$ г на $\Delta T = 60^\circ\text{C}$ один раз при постоянном давлении, а другой раз — при постоянном объёме. Оказалось, что при постоянном давлении требуется подвести на $\Delta Q = 1$ кДж больше тепла, чем при постоянном объёме. Найдите среднюю молярную массу воздуха, считая его идеальным газом.

$$\frac{Q_p - Q_v}{m} = \frac{\nu R \Delta T}{m} = \nu$$

ЗАДАЧА 5. (МФТИ, 1995) В вакуумной теплоизолированной камере находятся два масляных пузыря одинакового размера, один из которых наполнен гелием, а другой — водородом, до давления p_0 каждый. Найти отношение давления p , установившегося в камере после того, как пузыри лопнули, к начальному давлению газа в пузырях. Отношение температуры гелия T_1 к температуре водорода T_2 составляет $T_1/T_2 = 0,6$. Молярная теплоёмкость гелия при постоянном объёме $C_{V_1} = \frac{3}{2}R$, водорода — $C_{V_2} = \frac{5}{2}R$, где R — газовая постоянная. Объём пузыря в 160 раз меньше объёма камеры. Изменением поверхностной энергии плёнок при разрыве пузырей пренебречь.

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\frac{\nu_1 C_{V_1} T_1 + \nu_2 C_{V_2} T_2}{\nu_1 + \nu_2} + p_0}{\frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2}} = \frac{\nu_1 C_{V_1} T_1 + \nu_2 C_{V_2} T_2 + p_0(\nu_1 + \nu_2)}{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2 + p_0(\nu_1 + \nu_2)}$$

ЗАДАЧА 6. (МФТИ, 1996) Гелий из состояния с температурой $T_1 = 200$ К расширяется в процессе $pV^2 = \text{const}$ (p — давление, V — объём газа) с постоянной теплоёмкостью C . От газа отвели количество теплоты $Q = 415$ Дж, и конечный объём газа стал вдвое больше начального.

- 1) Определить конечную температуру гелия.
- 2) Определить теплоёмкость C .

$$Q = \nu C \Delta T = 415 \text{ Дж}; \quad T_2 = 200 \text{ К}; \quad V_2 = 2V_1$$

ЗАДАЧА 7. (МФТИ, 1996) Гелий из состояния с температурой $T_1 = 200$ К расширяется в процессе $p^2V = \text{const}$ (p — давление, V — объём газа) с постоянной теплоёмкостью C . К газу подвели количество теплоты $Q = 2190$ Дж. Конечное давление газа вдвое меньше начального.

- 1) Определить конечную температуру гелия.
- 2) Определить теплоёмкость C .

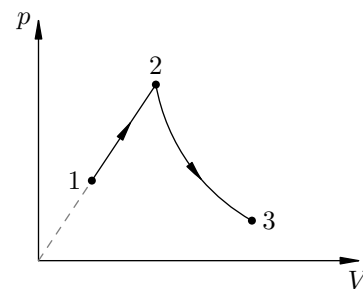
$$Q = \nu C \Delta T = 2190 \text{ Дж}; \quad T_2 = 200 \text{ К}; \quad p_2 = \frac{1}{2} p_1$$

ЗАДАЧА 8. (МФТИ, 1996) Гелий в количестве $\nu = 4$ моля сжимают в процессе с постоянной теплоёмкостью C . От газа отвели количество теплоты, равное изменению его внутренней энергии, и температура газа увеличилась на $\Delta T = 100$ К.

- 1) Чему равна работа, совершённая газом?
- 2) Определить теплоёмкость C .

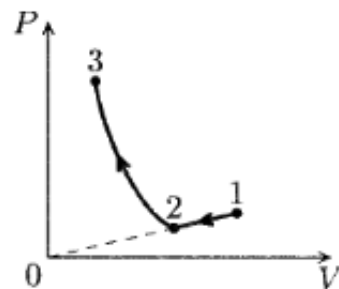
$$Q = \nu C \Delta T = -10 \text{ кДж}; \quad \Delta U = \nu C \Delta T = 400 \text{ Дж}; \quad \nu = 4$$

ЗАДАЧА 9. (МФТИ, 2002) Моль гелия, расширяясь в процессе 1–2 (см. рисунок), где его давление p меняется прямо пропорционально объёму V , совершает работу A . Из состояния 2 гелий расширяется в процессе 2–3, в котором его теплоёмкость C остаётся постоянной и равной $C = R/2$ (R — газовая постоянная). Какую работу A_{23} совершит гелий в процессе 2–3, если его температура в состоянии 3 равна температуре в состоянии 1?



$$A_{23} = 2A$$

ЗАДАЧА 10. (МФТИ, 2002) Моль гелия сжимают из начального состояния 1 в конечное состояние 3 в двух процессах (см. рисунок). Сначала сжатие идёт в процессе 1–2, когда давление гелия p прямо пропорционально его объёму V . Затем из состояния 2 газ сжимают в процессе 2–3 с постоянной теплоёмкостью так, что тепло подводится к газу. В конечном состоянии 3 температура гелия равна его температуре в состоянии 1. Найти теплоёмкость газа в процессе 2–3, если в процессе сжатия 1–2 над газом совершена работа A ($A > 0$), а в процессе 2–3 над газом совершена работа $2A$.



$$C = R/2$$

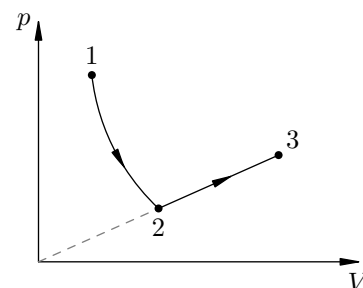
ЗАДАЧА 11. (МФТИ, 2006) С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс 1–2–3–1, состоящий из адиабатического расширения 1–2, расширения в процессе 2–3, в котором теплоёмкость газа оставалась постоянной, и сжатия в процессе 3–1 с линейной зависимостью давления от объёма. $T_1 = 2T_2 = T_3$, $V_3 = 4V_1$. Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 2–3, если работа, совершённая над газом в цикле, составляет $7/15$ от работы, совершённой над газом в процессе 3–1.

$$c = 2R$$

ЗАДАЧА 12. (МФТИ, 2006) С идеальным одноатомным газом проводят циклический процесс 1–2–3–1, состоящий из расширения в процессе 1–2, в котором молярная теплоёмкость газа постоянна и равна $2R$, адиабатического расширения 2–3 и сжатия в процессе 3–1 с линейной зависимостью давления от объёма. $T_1 = T_2/2 = T_3$, $V_3 = 4V_1$. Найдите работу, совершённую газом в процессе 1–2–3, если работа, совершённая газом в цикле, составила 100 Дж.

$$A_{123} = 1600 \text{ Дж}$$

ЗАДАЧА 13. («Физтех», 2010) Газообразный гелий из начального состояния 1 расширяется в процессе 1–2 с постоянной теплоёмкостью, совершая в нём работу $A_{12} = 400$ Дж. Затем к газу подводится количество теплоты $Q_{23} = 400$ Дж в процессе 2–3, в котором давление прямо пропорционально объёму (см. рисунок). Температуры в состояниях 1 и 3 равны.

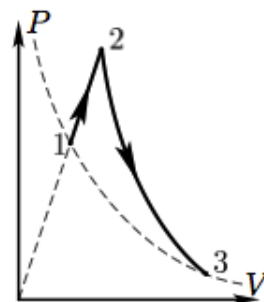


1) Найдите количество теплоты, подведённое к газу в процессе 1–2.

2) Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 1–2, выразив её через R .

$$1) Q_{12} = A_{12} = 400 \text{ Дж}; 2) c = \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) R = \frac{2}{15} R$$

ЗАДАЧА 14. («Физтех», 2010) Газообразный гелий из начального состояния 1 расширяется в процессе 1–2, в котором давление прямо пропорционально объёму, совершая в нём работу $A_{12} = 200$ Дж. Затем газ расширяется в процессе 2–3 с постоянной теплоёмкостью, совершая работу $A_{23} = 1000$ Дж. Температуры в состояниях 1 и 3 равны (см. рисунок).



1) Найдите количество теплоты, подведённое к газу в процессе 2–3.

2) Найдите молярную теплоёмкость газа в процессе 2–3, выразив её через R .

$$Q_{23} = \nu C_{23} \Delta T = \nu C_{23} (T_3 - T_2) = 1000 \text{ Дж} \quad (1)$$

ЗАДАЧА 15. («Физтех», 2016, 10) Один моль гелия находится при температуре $T = 273$ К. Далее газ расширяется так, что объём увеличивается на 3%, а давление уменьшается на 2%. Изменения параметров газа считать малыми.

- 1) Вычислите приращение ΔT температуры газа.
- 2) Какую работу ΔA совершил газ в процессе расширения?
- 3) Найдите молярную теплоёмкость C газа в этом процессе.

$$\Delta T = C \left(\frac{\Delta V}{V} - \frac{\Delta P}{P} \right) = C \left(\frac{0.03}{1} - \frac{-0.02}{1} \right) = C \cdot 0.05 \quad (1)$$

ЗАДАЧА 16. («Физтех», 2016, 10–11) Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры T_0 в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа зависит от температуры T по закону

$$C = R \frac{T}{T_0}.$$

- 1) Найти температуру T_1 , при нагревании до которой газ совершил работу, равную нулю.
- 2) Найти температуру T_2 , при достижении которой газ занимал минимальный объём в процессе нагревания.

$$Q_L = \int_{T_0}^{T_1} \nu C dT = \nu R \int_{T_0}^{T_1} \frac{T}{T_0} dT = 0 \quad (1)$$

ЗАДАЧА 17. («Физтех», 2016, 10–11) Газообразный гелий нагревается (непрерывно повышается температура) от температуры T_0 в процессе, в котором молярная теплоёмкость газа зависит от температуры T по закону

$$C = \alpha R \frac{T}{T_0},$$

где α — неизвестная численная константа.

- 1) Найти α , если известно, что при нагревании до температуры $T_1 = 5T_0/4$ газ совершил работу, равную нулю.
- 2) Найти температуру T_2 , при достижении которой газ занимал минимальный объём в процессе нагревания.

$$Q_L = \int_{T_0}^{T_1} \nu C dT = \nu \alpha R \int_{T_0}^{5T_0/4} \frac{T}{T_0} dT = 0 \quad (1)$$

ЗАДАЧА 18. (МФО, 2016, 11) Герметичный сосуд заполнен двухатомным идеальным газом. После значительного повышения температуры часть молекул диссоциировала на атомы, при этом удельная теплоёмкость всего газа возросла на 10%. Какая часть молекул диссоциировала? Теплоёмкость одного моля двухатомного идеального газа при неизменном объёме $C_V = 2,5R$.

90

ЗАДАЧА 19. (МФО, 2014, 11) На рисунке изображены два вертикальных сообщающихся цилиндрических сосуда. Верх левого сосуда герметично запаян, и этот сосуд частично заполнен гелием. Правый сосуд до краёв наполнен ртутью так, что часть ртути находится в левом сосуде, и гелий заперт ею. Система помещена в вакуум. Гелию начинают медленно сообщать теплоту и продолжают нагревание до тех пор, пока ртуть остаётся в левом сосуде. Определите удельную теплоёмкость гелия в этом процессе.

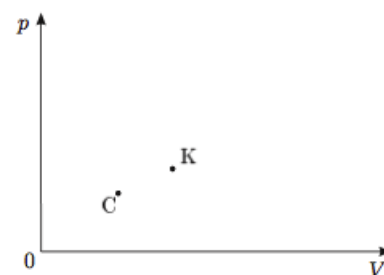


$$(C_V \cdot \text{мг}) / \text{кг} \cdot \text{Дж} / (\text{кг} \cdot \text{К}) = \frac{n}{\mu} = c$$

ЗАДАЧА 20. («Покори Воробьёвы горы!», 2014, 10–11) Один моль гелия, занимавший объём $V = 10$ л, нагрели в процессе, в котором его молярная теплоёмкость равнялась $C_\mu = 2,3R$ ($R = 8,31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная). При этом давление гелия увеличилось на 0,2%. На сколько см³ изменился объём гелия в этом процессе?

$$\varepsilon_{\text{мг}} = \frac{d}{dV} \Delta V = \Delta V$$

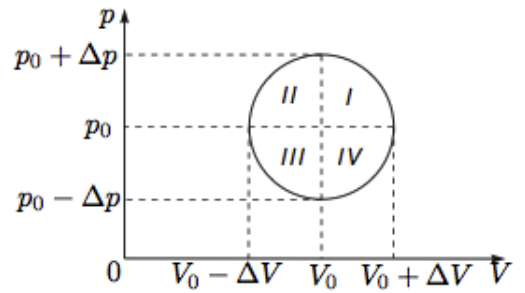
ЗАДАЧА 21. (Всеросс., 2013, регион, 11) Говорят, что в архиве лорда Кельвина нашли рукопись с pV -диаграммой, на которой был изображён циклический процесс в виде прямоугольного треугольника ACB . При этом угол C был прямым, а в точке K , лежащей на середине стороны AB , теплоёмкость многоатомного газа (CH_4) обращалась в нуль. Газ можно считать идеальным. От времени чернила выцвели, и на рисунке остались видны только координатные оси и точки C и K (см. рисунок). С помощью циркуля и линейки без делений восстановите положение треугольника ACB . Известно, что в точке A объём был меньше, чем в точке B .



ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2014, финал, 10) При охлаждении одного моля гелия от начальной температуры T_0 до некоторой конечной температуры T_x в процессе с теплоёмкостью C , прямо пропорциональной температуре T , газ совершил работу, равную нулю. В самом начале процесса охлаждения давление газа изменялось прямо пропорционально его объёму. Найдите величину положительной работы газа в данном процессе и отношение T_x/T_0 .

$$A^+ = \frac{1}{2} RT_0 \left(\frac{T_x}{T_0} \right)^2 = \frac{1}{2} RT_0 \left(\frac{T_x}{T_0} \right)^2$$

Задача 23. (Всеросс., 2016, финал, 11) Над молеми идеального многоатомного газа проводят круговой процесс, который, будучи изображённым на p, V -диаграмме, при некотором масштабе имеет вид окружности. Центр окружности имеет координаты (p_0, V_0) , диаметр вдоль оси давлений равен $2\Delta p$, а диаметр вдоль оси объёмов — $2\Delta V$.



1) Найдите все пары диаметрально противоположных точек окружности, в которых теплоёмкости одинаковы. Вычислите эти теплоёмкости.

2) Сравните теплоёмкости двух произвольных диаметрально противоположных точек, лежащих во 2 и 4 квадрантах окружности (см. рисунок); другими словами, определите, в какой из этих точек теплоёмкость больше и почему.

Примечание. Считайте, что теплоёмкость газа при постоянном объёме не зависит от T .

$$\boxed{c_V < c_C \Leftrightarrow \left(z : z \frac{\left(\frac{\Delta p_0 d}{d \Delta V \Delta p} \right)^{-1}}{p} + \lambda_C = C \right) (1)}$$