

Баллистика. Векторы

Вектор скорости \vec{v} и вектор перемещения \vec{s} тела, движущегося в поле силы тяжести, зависят от времени следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \quad (1)$$

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \quad (2)$$

В некоторых задачах имеет смысл не торопиться проектировать уравнения (1) и (2) на координатные оси (как это обычно делается), а вместо этого нарисовать соответствующие векторы и проанализировать возникающие геометрические ситуации.

ЗАДАЧА 1. Треугольник скоростей. В силу формулы (1) векторы \vec{v} , \vec{v}_0 и $\vec{g}t$ связаны правилом треугольника сложения векторов. Положив $\vec{v}_0 = \vec{OA}$ и $\vec{v} = \vec{OB}$, нарисуйте векторный треугольник OAB (треугольник скоростей). Как меняется треугольник скоростей с течением времени?

Точка B с течением времени движется по прямой, параллельной OA .

ЗАДАЧА 2. (МОШ, 2018, 9) Со скалы, возвышающейся над морем на высоту $h = 25$ м, бросили камень. Найдите время его полёта, если известно, что непосредственно перед падением в воду камень имел скорость $v = 30$ м/с, направленную под углом $\beta = 120^\circ$ к начальной скорости. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

$t = 1.4$ с

ЗАДАЧА 3. (Всеросс., 2012, РЭ, 10) Камень бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с. Через время τ он достиг максимальной высоты, удалившись по горизонтали на расстояние $L = 30$ м от места броска. Найдите время τ . Примите ускорение свободного падения равным $g = 10$ м/с².

$$\tau = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} = \frac{30}{25 \cos \alpha} = 1.2 \text{ с}$$

ЗАДАЧА 4. (МОШ, 2017, 11) Петя бросил мячик с балкона с начальной скоростью V стоящему на земле Васе. Через время $t_1 = 2,21$ с Вася поймал мячик, заметив, что в конце полёта скорость мячика была направлена перпендикулярно его начальной скорости в момент броска, совершённого Петей. Затем Вася сделал несколько шагов, остановился и бросил мячик обратно на балкон Пете, сообщив мячику такую же по модулю начальную скорость V . Петя поймал мячик через время $t_2 = 1,72$ с, заметив, что конечная скорость мячика также направлена перпендикулярно начальной скорости мячика в момент броска, совершённого Васей. Определите разницу высот H между кистями рук Пети и Васи, а также определите, чему равен модуль скорости V . Сопротивлением воздуха можно пренебречь, модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².

$$H = \frac{g}{2} (t_1^2 - t_2^2) = \frac{10}{2} (2.21^2 - 1.72^2) = 1.4 \text{ м}$$

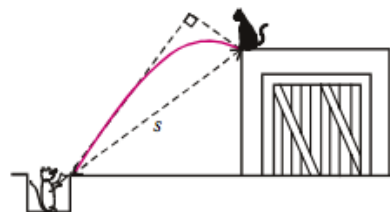
ЗАДАЧА 5. С помощью формул (1) и (2) покажите, что вектор \vec{s}/t равен полусумме векторов \vec{v}_0 и \vec{v} . (Таким образом, вектор \vec{s}/t является медианой \vec{OM} треугольника скоростей OAB .)

ЗАДАЧА 6. (Всеросс., 2012, РЭ, 9) Скорость камня v_0 , брошенного под углом $\varphi = 60^\circ$ к горизонту, уменьшилась вдвое за $\Delta t = 1$ с. Найдите модуль перемещения S , которое за это время совершил камень.

Примечание. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с².

$$v_0 \sin \varphi \Delta t \approx \frac{v_0 \Delta t}{2} \wedge \frac{v_0 \Delta t}{2} = S$$

ЗАДАЧА 7. (Всеросс., 1999, финал, 9) Кот Леопольд сидел у края крыши. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, упал у ног кота (см. рисунок) через время $\tau = 1$ с. На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд, если известно, что векторы скоростей камня в момент выстрела и в момент падения были взаимно перпендикулярны?



$$v_0 \tau \cos \varphi = s$$

ЗАДАЧА 8. Камень, брошенный с поверхности земли со скоростью v_0 под некоторым углом к горизонту, упал на землю спустя время t .

- а) Найдите дальность полёта l .
- б) Какова максимальная дальность полёта камня, брошенного с данной скоростью?

$$\frac{l}{v_0^2} = \sin 2\varphi \quad (g \text{ и } t \text{ известны или } \frac{v_0}{g} \text{ и } t \text{ известны}) \quad \frac{v_0}{g} \wedge t = l$$

ЗАДАЧА 9. Вернёмся к треугольнику скоростей OAB ; точка M — середина стороны AB . Опустим высоту OH . Изображением каких физических величин служат отрезки OH и HM ?

$$\text{высота и дальность полёта} \quad \text{и } l \text{ и } h \text{ — } HM \text{ и } l = HO$$

ЗАДАЧА 10. Камень брошен под углом к горизонту со скоростью v_0 . Найдите скорость камня в тот момент, когда он находится на высоте h .

$$v_0^2 - \frac{g^2 h^2}{v_0^2} = v^2$$

ЗАДАЧА 11. (МОШ, 2014, 9–11) Под углом 60 градусов к горизонту брошено тело с начальной скоростью 20 м/с. Ускорение свободного падения составляет 10 м/с². Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

- А) Через какое минимальное время тело будет двигаться под углом 30 градусов к горизонту? Ответ представьте в секундах и округлите до второй значащей цифры.
- В) На какой высоте тело будет двигаться под углом 30 градусов к горизонту? Ответ представьте в метрах и округлите до десятых.

$$\text{А) } 1,2; \text{ В) } 13,3$$

ЗАДАЧА 12. («Росатом», 2011, 11) Тело бросили под углом к горизонту. Известно, что время полёта тела равно τ , а отношение максимальной и минимальной скоростей тела в процессе движения $v_{\max}/v_{\min} = k$. Определить дальность полёта. Сопротивлением воздуха пренебречь.

$$\frac{1 - \frac{g \tau^2}{2}}{2} = l$$

ЗАДАЧА 13. (МФТИ, 1982) Мяч, брошенный одним игроком другому под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 20$ м/с, достиг высшей точки траектории через секунду. На каком расстоянии друг от друга находились игроки? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с².

$$v_{\text{гор}} \approx \frac{v_0 \sin(\alpha)}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ м/с}$$

ЗАДАЧА 14. (МФТИ, 1982) Баскетболист бросает мяч в кольцо. Скорость мяча после броска $v_0 = 8$ м/с и составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом. С какой скоростью мяч попал в кольцо, если он долетел до него за секунду? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения принять равным 10 м/с².

$$v_{\text{кольцо}} = \sqrt{v_0^2 - 2gz} = \sqrt{64 - 2 \cdot 10 \cdot 1} = 6 \text{ м/с}$$

ЗАДАЧА 15. (Всеросс., 2015, РЭ, 9) Величина скорости камня, брошенного с горизонтальной плоскости под углом к горизонту, через время $\tau = 0,5$ с после броска составляла $\alpha = 80\%$ от величины начальной скорости, а ещё через τ соответственно $\beta = 70\%$.

- 1) Найдите продолжительность T полёта камня.
- 2) На каком расстоянии S от места броска упал камень?

Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с², сопротивлением воздуха можно пренебречь.

$$S = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 80^\circ)}{9,8} = 1,2 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 16. Школьник Вася, находясь на улице и пытаясь привлечь внимание одноклассницы Маши, бросает ей в окно маленький камешек. Окно Маши расположено на высоте h над землёй, а скорость броска Васи равна v_0 .

а) Найдите расстояние s между Васей и Машиным окном, если камешек летел в течение времени t .

б) При каком максимальном расстоянии до окна Вася сможет попасть в него камешком?

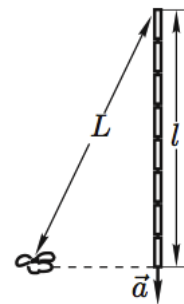
в) Покажите, что максимум величины s достигается в том и только в том случае, если конечная скорость камешка (в момент попадания в окно) перпендикулярна его начальной скорости.

$$s = \frac{v_0^2}{g} \left(\sin(2\alpha) - \frac{gt}{v_0} \right)$$

ЗАДАЧА 17. Мальчик бросает с балкона (точка A) мяч со скоростью v_0 под некоторым углом к горизонту. Спустя время t мяч падает на землю (точка B). Найдите расстояние AB . Балкон расположен на высоте h над землёй.

$$AB = \sqrt{v_0^2 t^2 - 2gt^2 + h}$$

ЗАДАЧА 18. (Всеросс., 2007, финал, 9) Пассажирский поезд длиной l стоял на первом пути. В последнем вагоне сидел Дядя Фёдор (герой книги Э. Успенского «Каникулы в Простоквашино») и ожидал письмо, которое ему должен был передать Шарик от кота Матроскина. В тот момент, когда поезд тронулся, на привокзальной площади, как раз напротив первого вагона, появился Шарик (рис.). Он определил, что расстояние до последнего вагона равно L . С какой минимальной скоростью v_0 должен бежать пёс, чтобы передать письмо, если поезд движется с постоянным ускорением \bar{a} ?

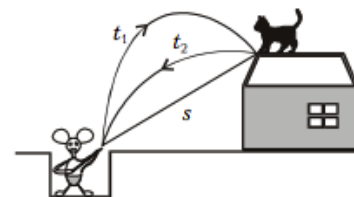


$$(1 - T)v^{\wedge} = 0a$$

ЗАДАЧА 19. (Всеросс., 2004, финал, 9) При осаде древней крепости осаждённые вели стрельбу по наступающему противнику с помощью катапульта из-за крепостной стены высотой $h = 20,4$ м. Начальная скорость снарядов $v_0 = 25$ м/с. На каком максимальном расстоянии l_{\max} от стены находились цели, которых могли достигать снаряды катапульта? Сравните это расстояние с максимальной дальностью L_{\max} снаряда катапульта. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

$$l_{\max} \approx \frac{v_0^2}{g} = \frac{25^2}{9.8} \approx 63.7 \text{ м}; L_{\max} \approx \frac{v_0^2}{g} = \frac{25^2}{9.8} = 63.7 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 20. (Всеросс., 2000, финал, 9) Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через $t_1 = 1,2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1,0$ с попал в лапу стрелявшего мышонка (см. рисунок). На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд?

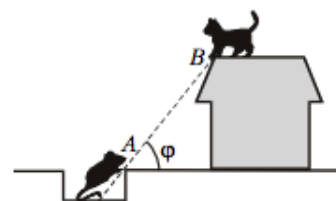


$$v_1 t_1 \sin \frac{\alpha}{2} = s$$

ЗАДАЧА 21. (МОШ, 2007, 10) Школьник бросает мяч в баскетбольное кольцо. Чтобы попасть в цель при броске под углом $\alpha_1 = 30^\circ$ к горизонту, он должен сообщить мячу начальную скорость $v_1 = v$, а при броске под углом $\alpha_2 = 60^\circ$ — начальную скорость $v_2 = v/2$. На какой высоте h над точкой бросания расположено баскетбольное кольцо? Под каким углом β к горизонту наклонён отрезок, соединяющий точку бросания и кольцо? Бросок каждый раз производится из одной и той же точки. Сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения равно g .

$$v_1 \sin \alpha_1 = v_2 \sin \alpha_2 = v \sin 30^\circ = v/2 = v_2$$

ЗАДАЧА 22. (Всеросс., 2002, финал, 10) Кот Леопольд сидел на самом краю крыши сарая. Два озорных мышонка решили выстрелить в него из рогатки, но кот заметил их и решил отстреливаться. . . Камни из рогаток мышат и кота вылетели одновременно и столкнулись в середине отрезка AB (см. рисунок). Найдите высоту H сарая и отношение пути, пройденного камнем кота Леопольда, к пути, пройденному камнем мышат, если известно, что $\varphi = 30^\circ$, скорость камня, вылетевшего из рогатки мышат, $v_0 = 7$ м/с, а кот выстрелил горизонтально.



$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \varphi}{2g} = \frac{7^2 \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9.8} = 0.5 \text{ м}$$

ЗАДАЧА 23. (*Всеросс., 2003, финал, 9*) Мальчик бросил камень под некоторым углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, при каких значениях угла бросания α камень всё время (до падения на землю) будет удаляться от мальчика.

$$\frac{g}{2v_0^2} > \sin \alpha$$

ЗАДАЧА 24. (*«Физтех», 2011, 11*) Камень брошен со скоростью $v_0 = 17$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. С какой угловой скоростью поворачивается вектор скорости камня через $t = 1$ с после броска? Принять $g = 10$ м/с², сопротивление воздуха не учитывать.

$$\omega / \text{rad s}^{-1} \approx \frac{v_0 \sin 60^\circ \alpha - g t \cos 60^\circ}{v_0 \cos 60^\circ} = \omega$$