Работа и энергия

Если на тело действует *постоянная* сила $\vec{F}$ и тело, двигаясь *прямолинейно*, совершило перемещение $\vec{s}$, то *работа* A силы $\vec{F}$ определяется как скалярное произведение силы на перемещение:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\alpha = F_s s, \tag{1}$$

где α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\vec{s}$, F_s — проекция силы на направление перемещения.

Как быть, если сила не является постоянной (зависит от времени или координаты) или тело движется по криволинейной траектории? Тогда на помощь приходит интегрирование.

1. Разбиваем траекторию γ тела на бесконечно малые кусочки длиной ds и рассматриваем их как стрелочки $d\vec{s}$ — бесконечно малые перемещения.

2. Для каждого малого перемещения находим элементарную работу $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_s ds$, после чего суммируем все элементарные работы:

$$A = \int\limits_{\gamma} F_s ds. \tag{2}$$

Этот интеграл и есть по определению работа силы $\vec{F}$ на пути γ.

Задача 1. Покажите, что определение (1) является частным случаем определения (2).

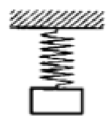
Задача 2. Пользуясь дистрибутивностью скалярного произведения, покажите, что работа равнодействующей нескольких сил равна алгебраической сумме работ этих сил.

Задача 3. Чему равна работа силы натяжения нити при колебаниях математического маятника?

Вычисление работы

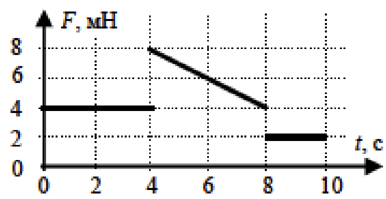
[Овчинкин] → 4.3, 4.4, 4.48, 4.49, 4.138, 4.139.

Задача 4. (*МОШ, 2018, 10*) На пружине жёсткостью $k = 100$ Н/м, прикреплённой к потолку, покоится тело массой $m = 2$ кг (см. рис.). На него начинает действовать направленная вертикально вниз сила $F = 30$ Н. Найти первоначальную деформацию пружины и работу силы F к тому моменту, когда груз опустится на высоту $h = 10$ см. $g = 10$ м/с^2.



$x_0 = \frac{mg}{k} = 20$ см; $A = Fh = 3$ Дж

Задача 5. (*МОШ, 2017, 10*) На тело массой $m = 20$ г начинает действовать единственная нескомпенсированная внешняя сила, график зависимости модуля которой от времени приведён на рисунке. Найдите работу этой силы в системе отсчёта, в которой начальная скорость тела $v_0 = 2$ м/с. Векторы силы и скорости тела всегда совпадают по направлению.



$A = 136{,}4$ мДж

Мощность

Мощностью называется скорость совершения работы, то есть производная работы по времени:

$$P = \frac{dA}{dt}\,.$$

[Овчинкин] → 4.34, 4.35, 4.61.

Теорема о кинетической энергии

Теорема. Изменение кинетической энергии тела равно работе равнодействующей всех сил, приложенных к данному телу.

Задача 6. Докажите эту теорему:

- для случая постоянной силы (здесь достаточно простых манипуляций с формулами равноускоренного движения);
- для случая переменной силы и прямолинейного движения: пишем второй закон Ньютона

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

умножаем обе части на $vdt = dx$ и интегрируем;

- для общего случая: пишем второй закон Ньютона

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

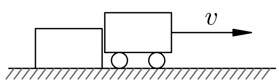
умножаем обе части на $\vec{v}dt = d\vec{s}$, доказываем равенство $\vec{v}\cdot d\vec{v} = vdv$ и интегрируем.

[Овчинкин] → 4.1, 4.9, 4.15, 4.16, 4.51.

Задача 7. (*Всеросс., 2017, ШЭ, 10*) Частица, имеющая массу $m = 0{,}1$ г и начальную скорость $V = 100$ м/с, попадает в область, в которой на неё в течение некоторого времени действует постоянная по модулю и направлению сила F. К моменту прекращения действия силы частица приобретает скорость $2V$ в направлении, перпендикулярном первоначальному. Под каким углом к первоначальному направлению движения частицы направлена сила F? Какую работу совершила сила F над частицей за время своего действия? Влиянием других сил можно пренебречь.

$\alpha = \pi - \operatorname{arctg} 2 \approx 115^\circ$; $A = \frac{3}{2}mV^2 = 1{,}5$ Дж

Задача 8. (*МФТИ, 1996*) Слипшиеся брусок и тележка движутся по горизонтальной поверхности стола (см. рисунок). В некоторый момент, когда скорость равна $v = 1$ м/с, брусок отлипает от тележки. На каком расстоянии друг от друга окажутся тележка и брусок к моменту остановки бруска? Коэффициент трения скольжения бруска о стол $\mu = 0{,}1$. Трением качения пренебречь.



$L = \frac{v^2}{2\mu g} \approx 51$ см

Задача 9. (*МОШ, 2007, 10*) По горизонтальному столу катится без трения тележка массой M со скоростью v_0. На горизонтальную поверхность тележки положили кирпич массой m, начальная скорость которого относительно стола была равна нулю. Кирпич прошел по тележке путь l и остановился относительно неё. Найдите коэффициент трения между кирпичом и тележкой.

$$\boxed{\mu = \frac{Mv_0^2}{2gl(M+m)}}$$

Задача 10. (*Всеросс., 2018, МЭ, 10*) Вдоль длинной доски, покоящейся на гладком горизонтальном столе, толкают с некоторой начальной скоростью брусок, масса которого вдвое больше массы доски. Пройдя по доске расстояние $L = 40$ см, брусок перестаёт по ней скользить. Какое расстояние пройдёт по этой доске брусок, имеющий массу, равную массе доски, сделанный из прежнего материала и запущенный с той же начальной скоростью? Считайте, что сразу после запуска бруска доска в обоих случаях покоится относительно стола.

$$\boxed{L' = \frac{3}{2}L = 60 \text{ см}}$$

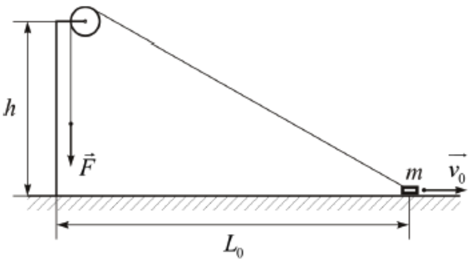
Задача 11. (*МОШ, 2017, 10*) Частица массой m, свободно летящая со скоростью V, попадает в область пространства, в которой в течение времени $\tau = 1$ с на неё действует постоянная по модулю и направлению сила $\vec{F}$. К моменту прекращения действия этой силы частица движется со скоростью $2V$ в направлении, перпендикулярном первоначальному. Какое время потребовалось бы такой же по модулю и направлению силе, чтобы совершить над частицей вдвое большую работу (при той же начальной скорости частицы)? Влиянием других сил пренебречь.

$$\boxed{t = \frac{1+\sqrt{31}}{5}\tau \approx 1{,}3 \text{ с}}$$

Задача 12. (*МОШ, 2017, 11*) На прямолинейно движущееся тело в течение времени $\tau = 5$ с действовала постоянная сила, направленная вдоль вектора скорости. Найдите расстояние, пройденное телом за время действия силы, если за это время модуль импульса тела возрос на $\Delta p = 4$ кг · м/с, а его кинетическая энергия увеличилась на $\Delta w = 10$ Дж.

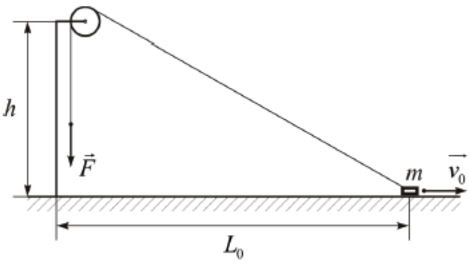
$$\boxed{s = \frac{\Delta w}{\Delta p}\tau = 12{,}5 \text{ м}}$$

Задача 13. (*«Курчатов», 2016, 10*) Маленький брусок массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии L_0 от вертикального столба, на котором на высоте h на коротком держателе закреплён маленький невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью. Невесомая нерастяжимая длинная нить одним концом прикреплена к бруску, перекинута через блок и натянута с постоянной силой F. Трения в оси блока нет. В начальный момент брусок скользит по поверхности и имеет скорость v_0, направленную от столба. Каким будет расстояние L_1 от столба до бруска в тот момент, когда брусок на мгновение остановится?



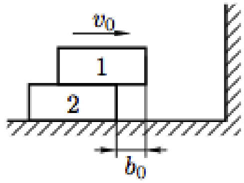
$$\boxed{L_1 = \sqrt{\left(\frac{mv_0^2}{2F} + \sqrt{L_0^2 + h^2}\right)^2 - h^2}}$$

Задача 14. (*«Курчатов», 2016, 11*) Маленький брусок массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии L_0 от вертикального столба, на котором на высоте h на коротком держателе закреплён маленький невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью. Лёгкая нерастяжимая длинная нить одним концом прикреплена к бруску, перекинута через блок и натянута с постоянной силой $F > mg$. Трения в оси блока нет. В начальный момент брусок скользит по поверхности и имеет скорость v_0, направленную от столба. Какой будет скорость бруска в тот момент, когда брусок перестанет давить на поверхность?



$$\boxed{v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2F}{m}\left(\sqrt{L_0^2 + h^2} - \frac{Fh}{mg}\right)}}$$

Задача 15. (*Всеросс., 2011, РЭ, 10*) Система, состоящая из двух одинаковых брусков массы m, движется с постоянной скоростью v_0 вдоль гладкой горизонтальной плоскости по направлению к вертикальной стенке. Верхний брусок смещён относительно нижнего на расстояние b_0 в направлении движения (см. рисунок). Через некоторое время система сталкивается со стенкой. Соударение любого из брусков с ней можно считать абсолютно упругим. Коэффициент трения между брусками μ.



1) Определите смещение b (модуль и направление) верхнего бруска относительно нижнего после того, как прекратится взаимодействие системы брусков со стенкой, а верхний брусок перестанет скользить по нижнему.

2) С какой скоростью v_k после этого будет двигаться система?

3) В каких координатах зависимость $b(v_0)$ будет линейна? Постройте график этой зависимости в соответствующих координатах.

Если $v_0^2 \leqslant 2\mu g b_0$, то $b = b_0 - \frac{v_0^2}{\mu g}$ и $v_k = 0$; если $v_0^2 > 2\mu g b_0$, то $b = -b_0$ и $v_k = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g b_0}$

[Овчинкин] → 4.40, 4.45, 4.125, 4.126.

Теорема Кёнига

При переходе из одной системы отсчёта в другую меняется скорость тела, а значит — и его кинетическая энергия. Как найти кинетическую энергию тела в движущейся системе отсчёта, зная её величину в неподвижной системе отсчёта?

Рассмотрим неподвижную систему отсчёта S (так называемую *лабораторную систему отсчёта*, или ЛСО) и систему отсчёта S', движущуюся относительно S со скоростью $\vec{v}_0$. Пусть *материальная точка* массой m движется со скоростью $\vec{v}$ относительно системы S и со скоростью $\vec{u}$ относительно S'. Понятно, что $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$.

Задача 16. Покажите, что кинетические энергии K и K' нашей материальной точки в системах S и S' соответственно связаны соотношением

$$K = K' + \frac{mv_0^2}{2} + m\vec{v}_0 \cdot \vec{u}.$$

Теперь рассмотрим *систему материальных точек* (например, твёрдое тело) общей массой $M = \sum m_i$, совершающую некоторое сложное движение в ЛСО S. Свяжем систему отсчёта S' с центром масс нашей системы точек, так что $\vec{v}_0 = \vec{v}_c$ (*система центра масс*, или СЦМ).

Теорема Кёнига. Кинетическая энергия системы материальных точек в ЛСО равна сумме кинетической энергии её центра масс $Mv_c^2/2$ и кинетической энергии системы в СЦМ:

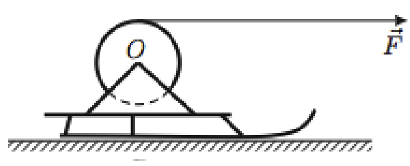
$$K = \frac{Mv_c^2}{2} + \sum \frac{m_i u_i^2}{2}\,.$$

Задача 17. Докажите теорему Кёнига.

Задача 18. Тонкий обруч массой m катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности со скоростью v. Найдите кинетическую энергию обруча.

$\boxed{K = mv^2}$

Задача 19. (*Всеросс., 2004, финал, 9*) Тонкостенный цилиндр массой m насажен с помощью лёгких спиц на горизонтальную ось O, закреплённую на санках (рис.), и может вращаться вокруг неё без трения. Масса цилиндра вместе с санками равна M. Мальчик тянет санки в горизонтальном направлении с постоянной силой F за лёгкий трос, намотанный на цилиндр. В результате за некоторое время санки из состояния покоя переместились по гладкой горизонтальной дороге на расстояние S.



1) Какой скорости V_1 достигли бы санки, пройдя путь S, если бы цилиндр был заторможен в оси и не мог вращаться?

2) Какой скорости V_2 достигли санки, пройдя путь S, при незаторможенном цилиндре?

3) Какую работу совершил мальчик при незаторможенном цилиндре?

$\boxed{V_1 = V_2 = \sqrt{\frac{2FS}{M}};\ A = FS\left(1 + \frac{M}{m}\right)}$

Потенциальная энергия в поле силы тяжести

Задача 20. Тело массы m перемещается вблизи поверхности Земли из точки P_1 (находящейся на высоте x_1) в точку P_2 (на высоте x_2). Покажите, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории тела и равна

$$A = mg(x_1 - x_2) = -\Delta U,$$

где $U = mgx$ — потенциальная энергия тела в поле силы тяжести.

Задача 21. Покажите, что потенциальная энергия системы точек в однородном поле силы тяжести равна mgh, где m — масса системы, h — высота её центра масс.

Задача 22. Требуется выкопать колодец глубиной h и площадью поперечного сечения S. Какую работу нужно совершить по подъёму грунта на поверхность земли? Плотность грунта равна ρ, грунт рассыпается тонким слоем по поверхности.

$\boxed{A = \frac{1}{2}\rho g S h^2}$

Задача 23. (*МОШ, 2010, 9*) На горизонтальном столе лежит на боку однородный конус массой m с радиусом основания R и углом при вершине 2α. Для того чтобы медленно поставить конус на вершину в положение, при котором его ось вертикальна, нужно совершить работу A. Какую минимальную работу A_1 нужно совершить для того, чтобы из исходного положения поставить конус на основание?

$\boxed{A_1 = mgR\sqrt{1 + \left(\operatorname{ctg}\alpha - \frac{A}{mgR(1-\sin\alpha)}\right)^2} - \frac{A\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$

Потенциальная энергия деформированной пружины

Задача 24. Жёсткость пружины равна k. Деформацию пружины изменяют от величины x_1 до величины x_2. Покажите, что работа силы упругости пружины при этом равна

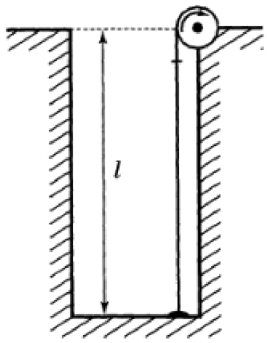
$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = -\Delta U,$$

где $U = \frac{kx^2}{2}$ — потенциальная энергия деформированной пружины.

Задача 25. (*«Курчатов», 2016, 9*) Пружина расположена вдоль оси X. Один из концов пружины закреплён. Для перемещения второго конца пружины из положения с координатой a в положение с координатой b потребовалось совершить работу A. Для перемещения этого же конца пружины из положения с координатой $2a$ в положение с координатой $2b$ потребовалось совершить работу $1{,}5A$. Какая работа потребуется для перемещения этого же конца пружины из положения $3a$ в положение $3b$?

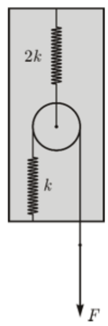
$\boxed{1{,}5A}$

Задача 26. (*Всеросс., 1993, ОЭ, 10*) На дне колодца лежит небольшого размера груз массы m, привязанный к невесомому упругому шнуру. Другой конец шнура прикреплён к оси колодезного ворота, а на самом шнуре сделана метка (рис.). В начальный момент времени шнур не провисает и не растянут. Затем ворот начинают вращать, наматывая шнур на ось. Какую работу нужно совершить, чтобы оторвать груз от дна колодца? В начальный момент длина шнура равна l, а метка на шнуре находится на расстоянии $0{,}9l$ от дна колодца. Известно также, что шнур, наматываясь на ворот, не проскальзывает по нему, а метка в момент отрыва груза от дна колодца оказывается на оси ворота.



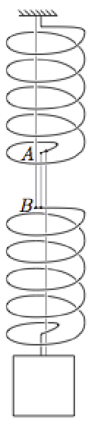
$\boxed{A = \frac{1}{18}mgl}$

Задача 27. (*Всеросс., 2015, РЭ, 10*) Внутри чёрного ящика находятся две лёгкие пружины с жесткостями k и $2k$, связанные лёгкой нерастяжимой нитью, и лёгкий подвижный блок (см. рисунок). В начальном состоянии внешняя сила $F = 6$ Н, приложенная к свободному концу нити, обеспечивает деформацию нижней пружины $x = 1$ см. Какую минимальную работу должна совершить внешняя сила, чтобы сместить вниз свободный конец нити ещё на x?



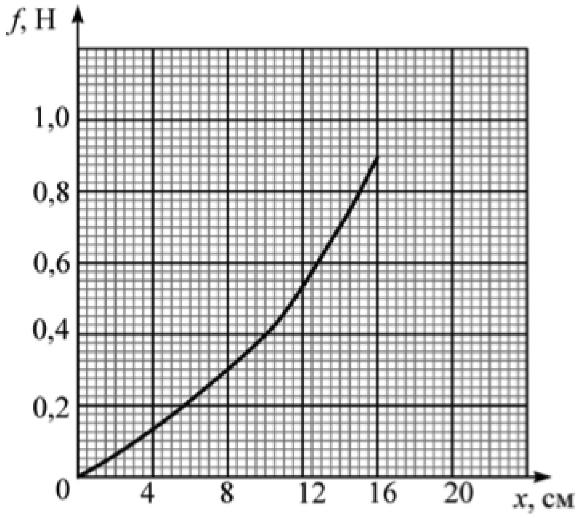
$\boxed{A = \frac{7}{6}Fx = 0{,}07 \text{ Дж}}$

Задача 28. (*Всеросс., 2014, РЭ, 10*) На двух лёгких одинаковых пружинах, соединённых нитью AB, висит груз массы m. Жёсткость каждой пружины равна k. Между витками пружины протянули ещё две нити: одну прикрепили к потолку и к верхнему концу B нижней пружины, а вторую — к грузу и нижнему концу A верхней пружины (см. рисунок). Эти две нити не провисают, но и не натянуты. Нить AB перерезали. Через некоторое время система пришла к новому положению равновесия. Найдите изменение потенциальной энергии системы.



$\boxed{\Delta W = -\frac{(mg)^2}{4k}}$

Задача 29. (*МОШ, 2012, 11*) Резиновый жгут и пружина в нерастянутом состоянии имеют одинаковые длины. Коэффициент жёсткости пружины равен $k = 4$ Н/м. График зависимости модуля f силы растяжения жгута от его удлинения x приведён на рисунке. Пружина и жгут очень лёгкие. Пружину подвешивают за один из концов к потолку, а к её второму концу прикрепляют конец жгута (при этом пружина и жгут оказываются соединёнными последовательно).



1) К свободному нижнему концу жгута прикладывают направленную вниз силу с модулем $F = 0{,}7$ Н. На какую суммарную величину X растянутся пружина и жгут?

2) Найдите массу m груза, который нужно подвесить к свободному нижнему концу жгута, чтобы суммарное удлинение системы в положении равновесия было равно $L = 20$ см.

3) Оцените энергию E, которая будет запасена в жгуте при подвешивании к его свободному нижнему концу покоящегося груза найденной выше массой m.

4) Груз этой массой m, подвешенный к свободному нижнему концу жгута, заставили свободно колебаться с амплитудой $A = 2$ мм вокруг положения равновесия. Пренебрегая трением, оцените, чему будет равен период таких колебаний груза.

При решении задачи считайте, что ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с^2.

1) $X = 31{,}5$ см; 2) $m = 40$ г; 3) $E = 18 \pm 2$ мДж; 4) $T = 0{,}84 \pm 0{,}05$ с

Потенциальная энергия в поле консервативной силы

Сила называется *консервативной*, если её работа не зависит от формы траектории и однозначно определяется начальным и конечным положением тела. Сила тяжести и сила упругости пружины — консервативные силы. Другими примерами консервативных сил являются сила гравитационного притяжения точечных масс (определяемая законом всемирного тяготения) и сила электростатического взаимодействия точечных зарядов (определяемая законом Кулона).

В поле[1] консервативной силы можно ввести потенциальную энергию с помощью формулы $A = -\Delta U$ или, подробнее, $A_{12} = U_1 - U_2$: работа поля по перемещению тела из точки *1* в точку *2* равна разности потенциальной энергии в начальной и конечной точках. Вы уже видели, как работает этот подход в случае силы тяжести и силы упругости.

Сила трения не является консервативной: работа силы трения очевидным образом зависит от траектории, по которой пееремещается тело между двумя фиксированными точками. Поэтому никакой потенциальной энергии для силы трения ввести нельзя!

Задача 30. Зная зависимость потенциальной энергии тела в некотором поле от координаты $U = U(x)$, можно найти силу, действующую на тело со стороны поля, по формуле $F_x = -\frac{dU}{dx}$. Убедитесь в этом на примере задач 20 и 24. Почему вообще это так?

[1]С понятием *поля* вы сталкивались неоднократно. Что это вообще такое? Если в каждой точке некоторой области пространства задан некоторый вектор, то говорят, что в данной области существует *векторное поле*. Например, вблизи небольшого участка поверхности Земли существует *однородное* поле силы тяжести — в каждой точке задан *постоянный* вектор $\vec{g}$. Вокруг пластин плоского конденсатора существует электрическое поле — в каждой точке задан вектор напряжённости $\vec{E}$; внутри конденсатора вдали от краёв пластин это поле также является однородным.

Сила называется *центральной*, если существует точка O такая, что: 1) в любой точке пространства сила направлена к точке O или от неё; 2) величина силы зависит только от расстояния до точки O. Примером центральной силы служит сила всемирного тяготения или сила электростатического взаимодействия точечных зарядов.

Задача 31. Покажите, что любая центральная сила является консервативной.

Задача 32. Покажите, что потенциальная энергия гравитационного взаимодействия точечных масс m_1 и m_2 определяется выражением

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r},$$

где r — расстояние между ними. (Нуль потенциальной энергии выбран на бесконечности.)

[Овчинкин] $\to$ 4.65, <u>4.119</u>.