


Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, региональный этап, 2017/18 год

Первый день

1. Внутри выпуклого пятиугольника отметили точку и соединили её со всеми вершинами. Какое наибольшее число из десяти проведённых отрезков (пяти сторон и пяти отрезков, соединяющих отмеченную точку с вершинами пятиугольника) может иметь длину 1?
2. В каждую клетку таблицы 1001×1001 поставили 0 или 1. Оказалось, что в любом столбце нулей больше, чем единиц. Обязательно ли найдутся два столбца таких, что число строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только нули, больше числа строк, в пересечениях которых с этими двумя столбцами стоят только единицы?
3. Дан неравносторонний треугольник ABC , в котором $\angle B = 135^\circ$. Пусть M — середина отрезка AC . Точка O — центр окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D . Докажите, что центр окружности Γ , описанной около треугольника BOD , лежит на прямой AC .
4. Изначально на доску выписали числа $1 - \sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x , y и z , а вместо них на доску записываются числа $x^2 + xy + y^2$, $y^2 + yz + z^2$ и $z^2 + zx + x^2$. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными?
5. Назовём *лодочкой* трапецию  с основаниями 1 и 3, получающуюся приклеиванием к противоположным сторонам единичного квадрата двух треугольничков (полуклеток). В квадрате 100×100 расположена невидимая лодочка (её можно поворачивать, она не выходит за границы квадрата, её средняя клетка целиком лежит на одной из клеток квадрата). Одним выстрелом можно накрыть любую треугольную половинку клетки. Если выстрел пересекается с внутренностью лодочки (т. е. пересечение треугольника выстрела с лодочкой имеет ненулевую площадь), то она считается потопленной. Какого наименьшего количества выстрелов достаточно, чтобы наверняка потопить лодочку?

Второй день

6. Петя выбрал натуральное число n и выписал на доску следующие n дробей:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \dots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Пусть число n делится на натуральное число d . Докажите, что среди выписанных дробей найдётся дробь, равная числу $d-1$.

7. Функция $f(x)$, заданная на всей числовой оси, при всех действительных x и y удовлетворяет условию

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Верно ли, что функция $f(x)$ обязательно чётная?

8. Докажите, что найдётся такое натуральное число $n > 10^{2018}$, что сумма всех простых чисел, меньших n , взаимно проста с n .

9. В компании 100 детей, некоторые дети дружат (дружба всегда взаимна). Известно, что при выделении любого ребёнка оставшихся 99 детей можно разбить на 33 группы по три человека так, чтобы в каждой группе все трое попарно дружили. Найдите наименьшее возможное количество пар дружащих детей.

10. На сфере ω_1 отмечена фиксированная точка A , а на сфере ω_2 — фиксированная точка B . На сфере ω_1 выбирается переменная точка X , а на сфере ω_2 — переменная точка Y так, что $AX \parallel BY$. Докажите, что середины всех построенных таким образом отрезков XY лежат на одной сфере.