

Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, региональный этап, 2016/17 год

Первый день

1. В произведении семи натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 13 раз?
2. Вася задумал восемь клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску восемь ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все лады, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (то есть 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть?
3. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел n_1, n_2, \dots, n_k и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)P(n_2) \dots P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным?
4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω . На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр O треугольника ABC . Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω , а другая — на ω .

Второй день

5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами?

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O . Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P , причём точка O лежит внутри треугольника BPC . На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90^\circ$. Описанная окружность ω треугольника PHD вторично пересекает отрезок PC в точке Q . Докажите, что $AP = CQ$.

7. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны каждой из проведённых прямых были равны.

8. Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждой 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, кратным 2^d ?