

Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, региональный этап, 2015/16 год

Первый день

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2 , одинаковыми коэффициентами при x , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i . Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

0 очков

2. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = BC$. В окружности Ω , описанной около треугольника ABC , проведён диаметр CC' . Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC , пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M — середина отрезка $C'P$.

3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

Нет

4. У царя Гиерона есть 11 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны $1, 2, \dots, 11$ кг. Ещё у него есть мешок, который порвётся, если в него положить больше 11 кг. Архимед узнал веса всех слитков и хочет доказать Гиерону, что первый слиток имеет вес 1 кг. За один шаг он может загрузить несколько слитков в мешок и продемонстрировать Гиерону, что мешок не порвался (рвать мешок нельзя!). За какое наименьшее число загрузок мешка Архимед может добиться требуемого?

2

Второй день

5. В классе учится 23 человека. В течение года каждый ученик этого класса один раз праздновал день рождения, на который пришли некоторые (хотя бы один, но не все) его одноклассники. Могло ли оказаться, что каждые два ученика этого класса встретились на таких празднованиях одинаковое число раз? (Считается, что на каждом празднике встретились каждые два гостя, а также именинник встретился со всеми гостями.)

17

6. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A , состоящее из натуральных чисел, *полным*, если для любых натуральных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A), при которых $a + b$ лежит в A , число ab также лежит в A . Найдите все полные множества натуральных чисел.

$\mathbb{N}; \{1, 2, 3, 4\}; \mathbb{N}$

7. В белой таблице 2016×2016 некоторые клетки окрасили чёрным. Назовём натуральное число k *удачным*, если $k \leq 2016$, и в каждом из клетчатых квадратов со стороной k , расположенных в таблице, окрашено ровно k клеток. (Например, если все клетки чёрные, то удачным является только число 1.) Какое наибольшее количество чисел могут быть удачными?

8001

8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB = 90^\circ$. Пусть M — середина стороны BC . Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.