

Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, региональный этап, 2015/16 год

Первый день

1. Квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$, не имеющий корней, таков, что коэффициент b рационален, а среди чисел c и $f(c)$ ровно одно иррационально. Может ли дискриминант трёхчлена $f(x)$ быть рациональным?

□

2. Положительные числа x , y и z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + zx$. Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . На отрезке CL выбрана точка M . Касательная в точке B к окружности Ω , описанной около треугольника ABC , пересекает луч CA в точке P . Касательные в точках B и M к окружности Γ , описанной около треугольника BLM , пересекаются в точке Q . Докажите, что прямые PQ и BL параллельны.

4. Есть клетчатая доска 2015×2015 . Дима ставит в k клеток по детектору. Затем Коля располагает на доске клетчатый корабль в форме квадрата 1500×1500 . Детектор в клетке сообщает Диме, накрыта эта клетка кораблём или нет. При каком наименьшем k Дима может расположить детекторы так, чтобы гарантированно восстановить расположение корабля?

□

Второй день

5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A , состоящее из действительных чисел, *полным*, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A), при которых $a + b$ лежит в A , число ab также лежит в A . Найдите все полные множества действительных чисел.

□

6. В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер — красного цвета, а остальные — зелёного. Каждую точку касания красной и зелёной сферы покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек.

□₇₈₀₀₁

7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

8. Натуральное число N представляется в виде

$$N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2,$$

где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1 , b_1 , c_1 и d_1 найдутся два равных?

□