

Всероссийская олимпиада школьников по математике**10 класс, региональный этап, 2015/16 год****Первый день**

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2 , одинаковыми коэффициентами при x , но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i . Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \dots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?
2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?
3. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырёхугольник, то и $ADML$ тоже вписан.
4. Дана клетчатая таблица 100×100 , клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?

Второй день

5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A , состоящее из действительных чисел, *полным*, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A), при которых $a + b$ лежит в A , число ab также лежит в A . Найдите все полные множества действительных чисел.

6. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I , касающаяся отрезков AB , CD и DA . Описанная окружность треугольника BIC вторично пересекает сторону AB в точке E . Докажите, что прямая CE касается окружности ω .

7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

8. Найдите все такие пары различных действительных чисел x и y , что $x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$ и $x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$.