Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2015/16 год

Первый день

1. Даны квадратные трёхчлены $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{100}(x)$ с одинаковыми коэффициентами при x^2, одинаковыми коэффициентами при x, но различными свободными членами; у каждого из них есть по два корня. У каждого трёхчлена $f_i(x)$ выбрали один корень и обозначили его через x_i. Какие значения может принимать сумма $f_2(x_1) + f_3(x_2) + \ldots + f_{100}(x_{99}) + f_1(x_{100})$?

Только 0

2. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

Нет

3. На стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$ взяты точки K и L (точка K лежит между A и L), а на стороне CD взяты точки M и N (точка M между C и N). Известно, что $AK = KN = DN$ и $BL = BC = CM$. Докажите, что если $BCNK$ — вписанный четырёхугольник, то и $ADML$ тоже вписан.

4. Дана клетчатая таблица 100×100, клетки которой покрашены в чёрный и белый цвета. При этом во всех столбцах поровну чёрных клеток, в то время как во всех строках разные количества чёрных клеток. Каково максимальное возможное количество пар соседних по стороне разноцветных клеток?

14751

Второй день

5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из действительных чисел, *полным*, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A), при которых $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

$\boxed{\mathbb{R}}$

6. Внутри равнобокой трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD расположена окружность ω с центром I, касающаяся отрезков AB, CD и DA. Описанная окружность треугольника BIC вторично пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что прямая CE касается окружности ω.

7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовём пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах.

8. Найдите все такие пары различных действительных чисел x и y, что $x^{100}-y^{100}=2^{99}(x-y)$ и $x^{200}-y^{200}=2^{199}(x-y)$.

$\boxed{(2,0);\ (0,2)}$