

Олимпиада «Высшая проба» по математике

9 класс, 2018 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 76 баллов.

1. От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч, случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

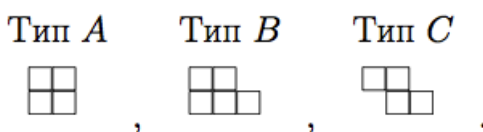
2

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение:

$$13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y.$$

2

3. Имеется три типа фигурок. Тип *A*: квадраты 2×2 . Тип *B*: прямоугольники 3×2 , из которых вырезана одна угловая клетка. Тип *C*: прямоугольники 3×2 , из которых вырезаны две противоположные угловые клетки:



Из этих фигурок составлен прямоугольник 20×17 . Какое наименьшее число фигурок типа *B* может быть при этом использовано? Фигурки можно как угодно поворачивать и переворачивать.

4. Треугольник ABC , в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O . В нём проведены высоты AA' и BB' , и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N . Пусть M — середина отрезка AB . Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA' , ON и MB' пересекаются в одной точке.

5. Чётное число $2N > 2$ называется подходящим, если оно делится на модуль разницы между наибольшим из своих чётных делителей, отличных от $2N$, и наибольшим из своих нечётных делителей. Сколько существует подходящих чётных чисел, не превосходящих 2018?

420

6. Из натурального числа n разрешается получить либо число $2n + 1$, либо число $3n + 2$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа от 1 до 2017, совместимые с числом 2018.

9431 и 279