

Олимпиада «Высшая проба» по математике

7 класс, 2017 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 47 баллов.

1. Дано равенство

$$(x - 7)(x^2 - 28x + \dots) = (x - 11)(x^2 - 24x + \dots).$$

Вместо многоточий стоят некоторые числа, выбранные так, что равенство верно при любом значении x . Найдите числа, стоящие вместо многоточий.

2. У Пети есть линейка длиной 10 см (то есть с помощью неё нельзя проводить отрезки длиной больше 10 см) и циркуль с максимальным раствором 6 см (то есть с помощью него невозможно рисовать окружности радиуса больше 6 см). Делений на линейке и циркуле нет, то есть измерять расстояния ими нельзя.

На листе бумаги нарисованы две точки. Известно, что расстояние между ними равно 11 см. Покажите, как Петя может соединить эти точки отрезком, используя только ту линейку и циркуль, которые у него есть.

В решении достаточно указать правильный способ построения. Доказывать его правильность не обязательно.

3. Найти все натуральные числа n от 1 до 100 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^3 .

4. На столе стоят три ящика с номерами 1, 2 и 3. В одном из них 1 красный, 1 синий и 1 зелёный шарик, в другом 1 красный и 1 зелёный, в третьем 1 синий шарик. При этом известно, что во всех трёх случаях номер ящика не совпадает с числом шариков внутри ящика. Как, вынув только один шарик, найти число шариков в каждом ящике?

5. Дана квадратная решётка 4×4 точек (то есть решётка 3×3 с отмеченными 4×4 вершинами всех клеток). Какое минимальное число треугольников нужно нарисовать, чтобы каждая точка попала на границу одного из треугольников? Приведите пример с указанным Вами числом треугольников и докажите, почему меньше нельзя.



6. Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

Не забудьте показать, что при указанном Вами размере партии это действительно возможно, а при меньших — нет.